department of economics
"S. Cognetti de Martiis"

Via Po, 53 – 10124 Torino (Italy)
Tel. (+39) 011 6702704 - Fax (+39) 011 6702762
URL: http//www.de.unito.it

WORKING PAPER SERIES

Gli studi matematici di Pareto all'Università di Torino: le coordinate istituzionali ed intellettuali generali, gli indirizzi epistemologici, i contenuti formali e l'influenza esercitata sull'opera paretiana

Fiorenzo Mornati

Dipartimento di Economia "S. Cognetti de Martiis"

Centro di Studi sulla Storia e i Metodi dell'Economia Politica
"Claudio Napoleoni"
(CESMEP)

Working paper No. 05/2005

Università di Torino

Fiorenzo Mornati

Gli studi matematici di Pareto all'Università di Torino : le coordinate istituzionali ed intellettuali generali, gli indirizzi epistemologici, i contenuti formali e l'influenza esercitata sull'opera paretiana

Versione provvisoria

Introduzione

Ritenendo poco soddisfacenti i risultati sin qui raggiunti dalla letteratura sull'epistemologia paretiana[1], consideriamo interessante contribuire al loro miglioramento svolgendo[2] un programma di ricerca *ad hoc* di tipo eziologico, di cui presentiamo qui i primi risultati, del tutto provvisori. Scopo ultimo di tale programma è quello di verificare, nel modo documentalmente più completo possibile, l'influenza che il *curriculum studiorum* giovanile[3] di Pareto ha avuto sulla sua concezione della scienza.
In questa sede, il nostro punto di partenza è un'importante suggestione di Busino secondo cui gli studi compiuti da Pareto all'Università di Torino furono dominati dalla meccanica razionale (nella versione della lagrangiana *Mécanique analytique*) e dal darwinismo[4]. Lasciando ad altra indagine la verifica del ruolo che gli studi scientifico-naturali (sicuramente extra-curriculari, come vedremo *infra*) hanno avuto nella formazione del pensiero scientifico paretiano, in questa sede ci proponiamo di iniziare ad approfondire il primo punto della tesi businiana, indagando gli studi matematici (in particolare di analisi matematica) che Pareto svolse negli anni accademici 1864-1865 e 1865-1866 alla Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali[5].
La preparazione matematica universitaria (distinta cioé da quella politecnica, successivamente conseguita) di Pareto[6] è evidentemente la risultante della sua capacità di apprendimento dell'insegnamento impartito dal docente, Angelo Genocchi, e tale insegnamento è, a sua volta, la risultante tanto della concezione che della matematica aveva Genocchi quanto dell'organizzazione che tale disciplina aveva nell'Università italiana del periodo.

---

[1] Allo stato esistono solo due monografie : (Tommissen 1971) e (Tarascio 1968). Il primo volume, a causa della lingua poco conosciuta in cui è stato scritto (il fiammingo), è purtroppo restato, finora, un libro chiuso. Dal canto suo, il lavoro di Tarascio ci sembra discutibile per ragioni di carattere filologico (si tratta di un'indagine compiuta solo su una parte, arbitrariamente scelta, dell'opera paretiana e trascurante completamente i luoghi dove si manifestano le fondamentali riflessioni epistemologiche pre-*Systèmes Socialistes*, il termine *a quo* tarasciano) e concettuale (il carattere arbitrario delle scelta dei, peraltro immaginari, interlocutori epistemologici di Pareto, segnatamente Comte e Weber ed il carattere parimenti arbitrario della scelta degli argomenti su cui Tarascio mette a confronto Pareto con tali interlocutori. Dubitiamo, per esempio, che per Pareto il tema della distinzione tra carattere positivo e normativo dell'economia avesse un senso nei termini da economista degli anni sessanta del Novecento con cui lo pone Tarascio). Alcuni recenti contributi positivi, ma ancora parziali (dal punto di vista della letteratura primaria studiatavi), alla conoscenza dell'epistemologia paretiana si trovano in (Marchionatti and Gambino 1997), (Marchionatti 1999), (Mornati 1999), (Bruni 2002), soprattutto pp.81-103 e (Marchionatti and Mornati 2003), pp.
[2] Nella prospettiva, di più lungo periodo, della realizzazione di una biografia intellettuale di Pareto la più completa e dettagliata possibile.
[3] Universitario e politecnico (ma anche scolastico), che copre complessivamente il periodo 1860-1870 .
[4] (Busino 1968), p.11.
[5] Sulla cui storia si veda (Roero 1999).
[6] Su cui esistono solo il pionieristico (Abrate 1973) e (Pepe 1999), che è il primo studio a dare indicazioni precise, per quanto sintetiche, sulle posizioni teoriche sostenute nell'ambiente in cui Pareto si è formato come matematico.

Ci proponiamo dunque di: esporre sinteticamente l'organizzazione che gli studi universitari di matematica avevano nel periodo in cui Pareto li compì (§1); definire i tratti essenziali dell'epistemologia genocchiana[7] (§2); delineare i contenuti, documentalmente noti, dei corsi di algebra complementare e di geometria analitica e, soprattutto, di analisi differenziale ed integrale tenuti da Genocchi, *Pareto inter eius discentes* (§3). Avremo così costruito uno degli *esplanantes* dell'*esplanandum* costituito dalla concezione paretiana della matematica, della quale daremo pure una prima interpretazione, per quanto molto schematica (§4). Infine, presenteremo le prime riflessioni circa l'effettiva influenza che il pensiero e l'insegnamento matematico di Genocchi hanno verosimilmente esercitato sulla concezione che Pareto ha avuto del ruolo della matematica nell'attività scientifica (§5).

1. Gli studi di matematica nell'Università italiana alla metà degli anni '60: scopi ed organizzazione

Gli studi di matematica nell'Università italiana del biennio 1864-1865 e 1865-1866 erano disciplinati dalla legge sull'istruzione pubblica del 13 novembre 1859 (nota come legge Casati), dal regolamento universitario generale e dal regolamento della Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali introdotti, entrambi il 14 settembre 1872, dal coevo ministro della pubblica istruzione, il fisico Carlo Matteucci.
La legge Casati assegnava all'istruzione universitaria il duplice scopo di migliorare la cultura scientifica e letteraria del Paese e di dotare i giovani, già forniti « delle necessarie cognizioni generali », delle competenze speciali richieste per accedere alle carriere pubbliche e private[8]. Secondo Matteucci, tale impostazione generale necessitava di essere opportunamente regolamentata in quanto che in Italia, diversamente da quanto avveniva nell'universitariamente ammirata Germania, « l'amor della scienza e il livello degli studi [non erano ancora] giunti..... a tal grado che gli studenti sanno quel che devon fare e seguono volonterosi e liberi quelle pratiche che un regolamento ben fatto prescriverebbe »[9]. L'esemplare pratica accademica tedesca poteva comunque essere seguita anche in Italia, limitando l'insegnamento all'esposizione (senza eccedere nei dettagli) « delle leggi e delle dottrine ben accertate », al fine di mettere in grado e di stimolare gli studenti a trarre loro stessi le deduzioni e ad impadronirsi delle cognizioni secondarie[10].
Per quanto riguarda la Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, il regolamento generale universitario le attribuiva la funzione specifica di preparare « convenientemente i giovani alle scuole pratiche d'ingegneri e d'industria » e di abilitarli « all'insegnamento di quelle scienze nei licei e nei ginnasi »[11]. Tale scelta didattica generale era applicata disponendo che le lezioni[12] vi venissero accuratamente alternate alle esercitazioni, nella convinzione che così si potesse

[7] Precisiamo che, di Genocchi, non intendiamo tentare di stabilire l'importanza nella storia della matematica (argomento che esula completamente e dal nostro progamma di ricerca e dalle nostre competenze) ma, appunto, la sua concezione generale della matematica, alla quale Pareto è stato esposto. Il riferimento fondamentale per gli studi sul pensiero matematico di Genocchi resta (Conte and Giacardi 1991).
[8] Legge 13 novembre 1859, art.47.
[9] (Matteucci 1872), p.XII.
[10] (Matteucci 1872), p.XV.
[11] (Matteucci 1872), p.XII.
[12] Che dovevano aver luogo almeno tre volte la settimana, per la durata di almeno un'ora, con il docente che aveva il diritto di interrogarvi gli studenti « per ottenere un'indicazione circa la loro diligenza ed il loro profitto », Regolamento generale delle Università del Regno d'Italia, art.5.

« mantenere viva la curiosità degli studenti e radicare in essi le cognizioni sostanziali »[13]. La Facoltà rilasciava quattro tipi di laurea[14] (in scienze matematiche pure, in scienze fisico-matematiche, in scienze fisico-chimiche, in storia naturale) . Per quanto riguarda il corso di laurea in matematiche pure (quello scelto da Pareto[15]) erano previsti i seguenti esami : 1° anno, algebra complementare e geometria analitica, chimica inorganica, disegno; 2° anno, calcolo differenziale ed integrale, geometria descrittiva, fisica sperimentale, disegno; 3° anno, meccanica razionale, geodesia teoretica, fisica sperimentale, disegno; 4° anno, analisi e geometria superiore, astronomia e meccanica celeste[16]. *A latere* del diploma di laurea, venivano rilasciati due titoli intermedi : il diploma di baccelliere a chi avesse superato tutti gli esami dei primi due anni e quello di licenza a chi avesse superato tutti gli esami dei primi tre anni[17]. Quest'ultimo titolo apriva « l'adito alle scuole di applicazione per gli ingegneri ed alle pratiche per ottenere il diploma di ingegnere secondo le leggi vigenti nelle varie Province del Regno »[18].

2. Un profilo dell'epistemologia di Genocchi nell'ambito della matematica italiana di metà Ottocento

Come Genocchi dette seguito a tali indirizzi? Cercheremo di dare una prima risposta a tale complessa domanda esponendo, in questo paragrafo, un abbozzo d'interpretazione della concezione genocchiana della matematica e presentando, nel successivo, un'analisi dei contenuti dei due corsi genocchiani summenzionati, che sicuramente risultarono anche da tale concezione.

---

13 (Matteucci 1872), p.XIX.

14 Regolamento per le Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, art.1.

15 Pareto, dopo aver superato l'esame di ammissione con la votazione di 27/30 (lettera a Domenico Pareto del 26 novembre 1864, (Pareto 1981), p.22), si iscrisse al corso di laurea in matematiche pure il 19 novembre 1864 , Archivio Storico dell'Università di Torino, Registri di iscrizione nella matricola e nel corso delle Facoltà di Teologia, Filosofia e Lettere, Scienze fisiche matematiche e naturali, IX. A 81, numero d'ordine 102.

16 Il piano di studi di Pareto contemplava, legge 13 novembre 1859, artt.51, 53 e regolamento per le Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, art. 6, solo due corsi con esercizi pratici : quelli di chimica organica e di fisica sperimentale. Non abbiamo notizie circa le eventuali esercitazioni di chimica inorganica, mentre sappiamo che Gilberto Govi, nel periodo in cui ebbe Pareto tra i suoi studenti di fisica sperimentale, dovette rinunciare agli esercizi pratici per mancanza di assistenti, Archivio Storico dell'Università di Torino, lettera di Govi al rettore del 6 luglio 1866, XIV.b.10, posizione XV, fasc.1°. Dunque sembra che la familiarità di Pareto studente universitario con la sperimentazione scientifica laboratoristica sia stata, nel migliore dei casi, modesta.

17 Regolamento per le Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, artt.17,18. Gli esami avevano luogo alla fine di ogni corso (legge 13 novembre 1859, art.127) e si articolavano su due argomenti estratti a sorte dalla commissione d'esame (Regolamento generale delle Università del Regno d'Italia, art.58) da un programma, valido per tutte le facoltà del regno, stabilito da una commissione ministeriale (legge 13 novembre 1859, art.130 e regolamento generale delle Università del Regno d'Italia art.74). Il programma doveva dare della disciplina una presentazione trattatistica per capitoli, due dei quali erano appunto l'oggetto del sorteggio succitato. Il programma menzionato rappresentava, dunque, la silloge degli argomenti su cui, secondo le singole comunità accademiche italiane dell'epoca, si articolavano le discipline universitarie. Alla facoltà scientifica, tali esami avevano una parte scritta solo se attinenti a corsi con esercitazioni pratiche, regolamento per le Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, artt.10-11.

18 Come noto, Pareto concluse gli studi universitari al termine del terzo anno conseguendo il diploma di licenza in matematiche pure (nell'Archivio Storico dell'Università di Torino, registro Rubrica dei Diplomi dal 2 gennaio 1863 al 31 dicembre 1869, il rilascio della licenza a Pareto è registrato, senza data, con n.d'ordine 1721) che gli consentì di iscriversi alla Scuola d'applicazione per gli ingegneri (Regolamento per le Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, art.18 ; Regio Decreto n.4052 del 14 novembre 1867 contenente il nuovo Regolamento della Scuola di Applicazione per Ingegneri, art.1) dove, dopo un ulteriore biennio di studi (Regio Decreto n.4052 del 14 novembre 1867 contenente il nuovo Regolamento della Scuola di Applicazione per Ingegneri, art.2), si sarebbe laureato in ingegneria civile il 14 gennaio 1870 discutendo la tesi (Pareto 1869) .

È stato autorevolmente sostenuto che i temi fondamentali della matematica italiana della prima metà dell'Ottocento concernessero la valutazione critica dell'opera di Lagrange, in particolare :
- l'incoerenza logica[19] tra la sua *Théorie des fonctions analytiques* (tesa a ricostruire il calcolo come ramo dell'algebra, cioè rifondandolo « realisticamente » su quantità finite e non su nozioni « metafisiche » quali gli infinitesimi leibniziani e le quantità evanescenti newtoniane[20]) e la sua *Mécanique rationelle*[21] (fondata, per di più assiomaticamente, sul concetto infinitesimale di velocità virtuali e sviluppata analiticamente mediante il ricorso a quantità parimenti infinitesimali[22]) ;
- la mancata dimostrazione preliminare della convergenza della serie impiegata da Lagrange per lo sviluppo delle funzioni [23].

Quest'ultimo argomento, in particolare, rappresentò uno dei punti di partenza della rifondazione che Cauchy, anche in esplicita polemica con Lagrange[24], fece dell'analisi matematica negli anni venti e trenta pervenendo alla nuova, nota riformulazione[25], che venne introdotta nell'università italiana solo tra la fine degli anni cinquanta e gli inizi degli anni sessanta, proprio da Genocchi a Torino e da Felice Casorati a Pavia[26].

Chi è dunque il protagonista subalpino di una svolta così importante nella storia dell'insegnamento dell'analisi matematica in Italia ?

Trattasi di uno studioso[27] che si inserisce, nella storia della matematica universitaria torinese, tra Giovanni Amedeo Plana , ultimo epigono della tradizione lagrangiana locale ed Enrico Peano (il noto ed innovativo logico matematico, assistente di Genocchi all'inizio della sua carriera accademica).

Gli storici della matematica sembrano concordi[28] nel ritenere che la formazione matematica autodidattica di Genocchi l'abbia reso immune dallo sterile tardo lagrangianesimo locale e l'abbia così agevolato nella sua opera di ricollocazione della matematica torinese alla frontiera internazionale della disciplina[29] nella quale rientrano i due principali interessi genocchiani: la

[19] (Bottazzini 1994), pp.34-36.
[20] (Bottazzini 1994), p.24
[21] Che (Genocchi 1883c), pp.93-94 considera l'opera lagrangiana più importante.
[22] (Bottazzini 1994), p.34.
[23] (Bottazzini 1994), p.37.
[24] (Bottazzini 1994), pp.46-47.
[25] Fondata sul concetto di limite, (Bottazzini 1981), pp.99-100.
[26] (Bottazzini 1991), p.40[19]. Casorati, in una lettera citata da (Siacci 1889), p.486 (collega di Genocchi e suo primo biografo), attribuisce all'omologo torinese il merito di essere stato tra i primi « ad introdurre nell'insegnamento [dell'Analisi infinitesimale] il rigore e le fini conquiste della Critica moderna ».
[27] Nato a Piacenza il 5 marzo 1817 e deceduto a Torino il 7 marzo 1889, la sua carriera accademica quale matematico (che ebbe inizio nel 1857, con la nomina ad incaricato della cattedra torinese di algebra e geometria complementare) fece seguito ad una prima carriera accademica nella Facoltà di diritto di Piacenza (dove dal 1846 era ordinario di Istituzioni civili) cui aveva rinunciato, partendo in esilio volontario a Torino, al fine di evitare, dopo gli eventi del 1848, l'aborrita occupazione austriaca della sua città natale, (Siacci 1889), pp.464-465, (Conte 1991), pp.1,2[2] , (Giacardi 1999).
[28] Oltre che nel sottolineare la notevole rilevanza del contributo genocchiano alla ricostruzione ed alla rivalutazione, operazioni tipicamente risorgimentali, della storia della matematica italiana, (Fiocca 1991), (Picutti 1991), (Pepe 1991). E' interessante, per esempio, rilevare il puntiglio con cui Genocchi rivendica « l'italianità » di Lagrange, (Genocchi 1869a), p.277[16], (Genocchi 1878b), pp.377-378, (Genocchi 1873-1874), pp.752-753.
[29] (Conte 1991), pp.2-4. Il movimento di rafforzamento dei legami intellettuali e personali con la comunità matematica internazionale (segnatamente le prevalenti scuole di Parigi, Göttingen e Berlino) fu un altro carattere importante della matematica italiana dell'età risorgimentale (Bottazzini 1994), pp.13, 80, 124-127. (Siacci 1889) p.468, fa rilevare che Genocchi partecipò a tale movimento pubblicando numerosi contributi su pubblicazioni

teoria dei numeri[30] e lo studio critico dell'allora rivoluzionaria geometria non euclidea. Peraltro, a tali studiosi l'interesse di Genocchi per la teoria dei numeri appare selettivo[31], limitandosi alla teoria dei residui quadratici[32], a problemi di teoria delle equazioni[33] ed ai metodi di approssimazione delle serie asintotiche[34], e non foriero di contributi originali[35].
Gli storici, comunque, non hanno mancato di sottolineare l'interesse epistemologico degli scritti genocchiani di critica teorica, in quanto rivelatori di un'attenzione scettica verso le nuove intuizioni teoriche, se non rigorosamente dimostrate[36].
Ed è su una lettura, compiuta da un punto di vista non tecnico ma epistemologico, dei più noti tra questi studi critici che vogliamo intrattenerci per cercare di iniziare a comprendere la concezione che Genocchi aveva della matematica [37].

2.1 Il senso e l'importanza del rigore dimostrativo

---

francesi e belghe e corrispondendo con tutti i più importanti matematici del periodo (*inter alios* Hermite, Hoüel, Lebesgue, Quetelet, Schwarz, (Fenoglio 1991)).

30 Verso la quale Genocchi, secondo (Peano 1890) p.196, nutriva un « fascino irresistibile » che lo conduceva, già durante il periodo dei suoi studi giuridici, a coltivare, quale lettura preferita, le *Disquisitiones Aritmethicae* di Gauss. (Siacci 1889) p.467, ritiene che i lavori più importanti di Genocchi attengano « alle serie, al calcolo integrale e alla teoria dei numeri ». (Genocchi 1855), p.675, dal canto suo afferma di collocare, in una classifica dell'importanza relativa delle varie parti della matematica pura, al primo posto « la dottrina de' numeri o aritmetica speculativa », che ritiene « più ardua del calcolo differenziale e d'alcune parti dell'integrale » in quanto gli sembra richiedere « tanta accuratezza nelle deduzioni, tanta diligenza nel tener conto d'ogni menoma circostanza e nel considerare tutti i casi e tutti gli aspetti della questione, che più volte anche a sagaci e profondi matematici è incontrato di commettere inesattezze e errori e dare per dimostrazioni rigorose e perfette quelle che tali non erano ».

31 (Viola 1991), p.12. Per contro, la prima pubblicazione genocchiana sull'argomento, (Genocchi 1851), mostrerebbe, secondo (Siacci 1889), pp.465, 467, « già la piena maturità de' suoi studi » in quella « ch'è considerata la più difficile delle teorie matematiche », e della quale è unanimemente ritenuto il principale studioso italiano del periodo : in senso analogo, (Viola 1991), p.29, (Carbone, Gatto et al. 2001), p.23. Una rassegna genocchiana dei più recenti contributi coevi alla teoria in questione si trova in (Genocchi 1860).

32 (Genocchi 1852b), (Genocchi 1854). La formulazione più semplice di tale argomento, sviluppato da Legendre, Gauss e Dirichlet (per una sua contestualizzazione storica, (Viola 1991), pp.18-25), richiede, dati due numeri interi p e q, di ricercare un numero intero x tale che x^2-q sia divisibile per p. Se x esiste, q è definito resto quadratico di p. In termini gaussiani, $x^2 \equiv q (mod\ p)$ da leggersi come « x^2 è congruo a q modulo p »: p.e. $x^2 \equiv 17 (mod\ 13)$ ha come soluzione $x=11$, (Boyer 1976), p.564.

33 Segnatamente : (Genocchi 1864), (Genocchi 1865), (Genocchi 1875-76), (Genocchi 1883a), studi relativi alle condizioni di esistenza di soluzioni intere di sistemi di equazioni diofantee (cioé a coefficienti interi) ; (Genocchi 1866), indagine sulle condizioni di integrabilità delle equazioni differenziali tratte da funzioni ellittiche.

34 (Genocchi 1852a), (Genocchi 1884b).

35 (Viola 1991), p.23.

36 (Viola 1991), p.17.

37 Da una consultazione della parte non formale dei quasi 200 articoli di Genocchi (pubblicati soprattutto sulle seguenti riviste: Nouvelles Annales de Mathématiques ; Annali di scienze matematiche e fisiche ; Bulletin de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique ; Annali di matematica pura ed applicata ; Memorie della R.Accademia delle Scienze di Torino ; Atti della R. Accademia delle scienze di Torino ; Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris, Bullettino di bibliografia e di storia della scienze matematiche e fisiche), non abbiamo desunto altre indicazioni direttamente riguardanti l'epistemologia genocchiana. *Il va sans dire* che uno studio specialistico (eseguibile solo da storici della matematica) di tali articoli, volto segnatamente a collocarne gli argomenti nella storia della matematica e a ricostruirne la tecnica dimostrativa, potrebbe dare nuovi ed importanti contributi alla conoscenza dell'epistemologia genocchiana.

La ricostruzione dell'epistemologia di Genocchi ci sembra potersi iniziare dalla sua scelta di campo, mutuata forse da Felice Chiò[38] suo maestro di matematica ed amico personale, a favore della «parte astratta e speculativa della matematica »[39].
A sostegno di tale posizione Genocchi invoca[40] soprattutto la concezione di Weierstrass[41] (perorante che si indaghi « più profondamente il nesso tra la matematica e la scienza della natura », rifiutando in particolare la visione della matematica come disciplina ausiliaria della fisica[42]) ed il recente, accorato appello dell'Académie des Sciences parigina[43]. L'Institut si era infatti espresso a favore di un insegnamento universitario posto (come nella Germania appena vittoriosa) sempre più sotto l'egida dell'indirizzo teorico, in ormai impellente alternativa a quell'indirizzo pan-applicativo che era risultato, in Francia come lo era stato precedentemente in Cina, letale al progresso non solo teorico ma anche applicativo della scienza[44].
Ma cosa intendeva Genocchi per quel progresso teorico così irresponsabilmente ostacolato ?
Innanzitutto, ci pare, il perseguimento di un sempre maggiore rigore dimostrativo[45], come indica chiaramente la polemica che ebbe con Menabrea a proposito del trattamento dello sviluppo in serie proposto dalla *Théorie des fonctions analytiques*[46].
Chiò aveva rilevato tanto l'inesattezza del criterio lagrangiano di convergenza della serie di Taylor quanto la conseguente non avvenuta dimostrazione che la soluzione lagrangiana consentisse davvero di trovare gli zeri della funzione originaria[47] ed aveva proposto, fondandosi sul teorema della convergenza della serie di Taylor formulato da Cauchy[48], un metodo

[38] Che, secondo Genocchi, l'aveva fatta propria seguendo l'esempio dei suoi maestri Plana, Lagrange e Laplace, anche loro cultori « dell'analisi pura » (Genocchi 1871), p.365.
[39] Tale orientamento, molto discusso all'estero, rivestiva un carattere di particolare urgenza anche in Italia, dove pure era ormai « invalso l'andazzo di gettar il discredito sugli studi teorici », (Genocchi 1871), p.364 e lettera a Luigi Cremona del 28 marzo 1866, (Carbone, Gatto et al. 2001) p.169.
[40] Oltre alle opinioni analoghe di Liouville, Chasles, Hermite, Kummer, Kronecker ed all'interpretazione genocchiana di Lagrange quale autore che deve la sua fama agli scritti di matematica pura, che esprimerebbero una preferenza per la speculazione astratta orientante anche i suoi scritti di meccanica, acustica, ottica ed astronomia, (Genocchi 1869a), p.274.
[41] (Genocchi 1871), p.364
[42] Nella sottomenzionata querelle con Menabrea, (Genocchi 1872), p.538 liquiderà come « eresia matematica » la pretesa del generale-matematico di considerare «l'analisi....se non come uno strumento per risolvere problemi », (Menabrea 1872), p.304.
[43] (Genocchi 1871), pp.365, 374-376.
[44] (Genocchi 1871), p.375. Sulla coeva polemica franco-tedesca riguardante il carattere teorico o applicativo che dovevano avere gli studi matematici, (Bottazzini 1981), pp.52-54, 78-81, (Bottazzini 1990), pp.138-141. Il solo matematico francese estraneo alla moda applicativa era, secondo (Bottazzini 1990), pp.84-85, Cauchy.
[45] Per le origini della concezione ottocentesca del rigore matematico, (Bottazzini 1981), pp.84-92. Non è chiaro se, per Genocchi, il significato del concetto di rigore sia dato una volta per tutte o storicamente determinato, (Bottazzini 1981), pp.13, 24-25.
[46] Data la funzione $\varphi(x)$, se alla variabile x si aggiunge una qualunque quantità (finita o infinitesimale) i, allora varrebbe sempre la relazione $\varphi(x+i) = \varphi(x) + pi + ri^2 + zi^3$.....dove i coefficienti p,r,z sono le derivate di primo, secondo, terzo……ordine ($p = \dfrac{\varphi(x+i) - \varphi(x)}{i} = \varphi'$……), (Bottazzini 1994), p.24. Per una trattazione generale della problematica suscitata dal tentativo lagrangiano, (Bottazzini 1981), pp.42-50.
[47] Secondo (Genocchi 1873b), p.1544, Chiò è stato il primo autore a trattare esplicitamente e soddisfacentemente le due questioni in un modo congiunto.
[48] Che, secondo (Genocchi 1871), p.370, rappresenta « forse la più importante scoperta» del matematico francese. Sull'attenzione riservata da Cauchy alla questione della convergenza delle serie, (Bottazzini 1981), pp.104-114, 118-119.

alternativo[49]. E, *iuxta* Genocchi, la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali dell'Accademia delle Scienze di Torino, guidata da Menabrea, si era rifiutata di pubblicare il contributo di Chiò solo perché troppo pedissequamente ligia « alle idee di Lagrange ed Eulero »[50].

Genocchi, menzionando Gauss, Abel, Poisson, Binet, Cauchy, puntualizza, invece, che l'uso delle serie divergenti nelle dimostrazioni « non [è] più tollerato oggi da' geometri » in quanto conduce a risultati « toujours incertains, et le plus souvent inexacts »[51], il che è contrario all'ormai imperativa esigenza, qualche volta appunto non rispettata nel passato, « de la rigueur des méthodes[52], dans la vue de les simplifier» [53]. Peraltro, l'invocato rigore metodologico non implica, secondo Genocchi, un'unicità procedurale [54].

Un esempio interessante della sua concezione del rigore Genocchi lo presenta quando, discutendo della recentemente rinnovata geometria analitica, annota che le sue indagini sugli spazi a *n* dimensioni non sono che dell'analisi e che, quindi, non hanno esteso la portata della geometria (si riferisce a quella euclidea) privandola invece « de ce qui forme son meilleur avantage et son charme particulier, de la propriété de donner une représentation sensible aux résultats de l'analyse »[55]. Tale vantaggio è stato invece sostituito dallo svantaggio di rendere assurdi (proprio a seguito della loro rappresentazione mediante « des points, des lignes ou des espaces qui n'ont aucune existence réelle et dont l'admission répugne au bon sens ou dépasse notre intelligence ») dei risultati « qui n'auraient rien de choquant sous leur forme analytique »[56].

Genocchi ne trae che l'analisi matematica deve perseguire l'obbiettivo di « recar[e le sue proposizioni] all'evidenza della geometria », un obiettivo che potrà dirsi raggiunto solo se l'analisi riuscirà a diventare « una sequela di raziocinii rigorosi [cioè] senz'altro fondamento fuorché gli assiomi e le convenzioni »[57].

---

49 Genocchi, 1875 #3505] asserisce, citando Darboux, che le condizioni di convergenza della serie di Lagrange trovate da Cauchy e Chiò sono « nécessaires et suffisants [ce qui implique qu'] il n'y a plus rien de nouveau à établir sur cette question ». Più in generale, Genocchi apprezza lo studio di Chiò collocandolo nella concezione genocchiana della « risoluzione delle equazioni » quale « il problema principale dell'algebra », il cui scioglimento, « non potendosi in generale condur[lo] a termine con un numero limitato d'operazioni algebriche », richiede il ricorso a « metodi d'approssimazione », il più importante dei quali gli sembra appunto essere « l'uso delle serie » (Genocchi 1871), p.366

50 (Genocchi 1871), pp. 366-367.

51 (Genocchi 1857b), pp.409-410, (Genocchi 1872-1873), pp.30-31.

52 L'argomento, addotto da (Menabrea 1872) p.305, secondo cui, « sino a più convincenti prove in contrario », si debba comunque fare ricorso al metodo di Lagrange è scartato recisamente da (Genocchi 1872), p.537[5] con l'affermazione che « Queste decisioni da oracolo pei matematici non hanno valore ».

53 (Genocchi 1857b), pp.409-410. Commentando un lavoro di un collega, (Bruno 1868), Genocchi, lettera a Luigi Cremona del 22 dicembre 1865, (Carbone, Gatto et al. 2001), p.166, afferma di non trovare « molto vantaggioso il metodo laborioso e munizioso con cui è condotto ».

54 (Genocchi 1857a), p.281. (Genocchi 1852b), p.433, in particolare, aderisce all'opinione di Dirichlet secono la quale « c'est surtout [dans la théorie des nombres] qu'il y a de l'avantage à envisager la même question sous des points de vue différents ».

55 (Genocchi 1873a), p.192, (Genocchi 1878b), pp.388-389.

56 (Genocchi 1873a), p.192, (Genocchi 1878b), pp.384, 389, lettera a Luigi Cremona (come noto, uno dei maggiori studiosi internazionali della nuova geometria analitica) del 29 marzo 1868, (Carbone, Gatto et al. 2001), pp.179-180.

57 Di cui fanno parte le definizioni e le notazioni impiegate (Genocchi 1883b), p.195. Genocchi dà diversi esempi interessanti di definizioni riformulate in modi, secondo lui, rigorosi. Così, nella teoria dei numeri immaginari, la lettera *i* deve essere considerata come rappresentante una quantità « vera…..ma indeterminata » da cui si può pervenire all'espressione $i^2=-1$, purché sia chiaro trattarsi solo « d'una sostituzione o trasformazione, non d'una vera eguaglianza perché il quadrato di una vera quantità non può eguagliare –1 » (Genocchi 1883b), pp.196-197. Ancora più significativa è la definizione « pienamente conforme all'evidenza ed esattezza geometrica » del limite come quel

2.2 La plausibilità scientifica dei principi del ragionamento matematico

Il rigore invocato da Genocchi ci sembra, comunque, consistere non solo nell'assicurare una perfetta coerenza logica tra i diversi passaggi delle dimostrazioni[58] ma anche, e forse soprattutto, nella chiarezza definitoria dei punti di partenza di queste ultime.
Al riguardo, Genocchi condivide esplicitamente l'impostazione dell'*Encyclopédie*, secondo la quale il principio di una scienza è un fenomeno di cui tutti possano supporre intuitivamente l'esistenza[59] e del quale la scienza studia in seguito tutte le proprietà. Lo spazio è, così, il principio della geometria euclidea, che per Genocchi sembra essere la geometria tout court[60], mentre il movimento è il principio della meccanica. Per contro, altri argomenti comunemente evocati discutendo i prolegomeni scientifici, come la possibilità e l'impossibilità di un fenomeno oppure la sua natura, devono considerarsi come « appartenant à une autre science, ou comme une région entièrement refusée à nos regards »[61].
A notevole conferma del carattere « anti-metafisico » della sua concezione della matematica interviene anche l'indisponibilità di Genocchi a seguire la tendenza, invalsa a partire dagli anni '60 dell'Ottocento e sostenuta dai matematici tedeschi (Weierstrass e Kronecker in primo luogo), a liberare l'analisi « da ogni riferimento intuitivo all'evidenza geometrica o fisica»[62] rifondandola esclusivamente sulla teoria dei numeri (aritmetizzazione dell'analisi)[63], della quale pure è, come visto, uno studioso appassionato e molto qualificato. In effetti, ancora prima di diventare un matematico di professione, Genocchi aveva affermato che l'analisi matematica di Leibniz, Euler, D'Alembert e Lagrange era « da abbandonarsi totalmente »[64], in quanto troppo precariamente fondata non solo su « equazioni indubitabilmente false »[65] e su « petizioni di principio »[66] ma anche su « definizioni ripugnanti al buon senso »[67].
Un contributo decisivo all'auspicata chiarificazione dei principi della matematica non poteva dunque essere dato dai metafisici[68] ma solo dai « due più grandi geometri dell'età nostra », cioè Cauchy e Gauss la cui impostazione consente di « trattare le questioni *terra terra* », la modalità

---

valore cui una quantità variabile « si accosta » lasciando una differenza « mai nulla » ma « minore d'una frazione data qualsiasi » (Genocchi 1883b), p.198.
[58] E la limpidezza delle loro eventuali illustrazioni geometriche.
[59] (Genocchi 1878b), p.387.
[60] (Genocchi 1878b), p.387.(Genocchi 1876b), p.491 asserisce che « l'antica [geometria] basta a tutto ».
[61] (Genocchi 1878b), pp.387-388
[62] (Bottazzini 1990) , p.67. Genocchi sembrerebbe quindi contrastare anche l'impostazione di Cauchy la quale perseguiva un « programma di eliminazione dall'analisi di ogni ambiguo ricorso all'intuizione geometrica », (Bottazzini 1990), p.192.
[63] (Boyer 1976), pp.633-655, (Bottazzini 1981), pp.214-241.
[64] (Genocchi 1883b), p.193 (tale scritto reca la data del 4 marzo 1856, *ibidem*, p.202).
[65] Come la pretesa summenzionata di esprimere una funzione mediante una serie divergente, visto che la somma di quest'ultima « è infinita o indeterminata e non può quindi scriversi eguale ad una quantità finita e determinata », (Genocchi 1883b), p.194.
[66] Per esempio, il « metodo dei coefficienti indeterminati, che si applica a svolgere le funzioni in serie presupponendo la forma delle serie e la possibilità della risoluzione », (Genocchi 1883b), p.194.
[67] Per esempio, la pretesa irragionevole che le quantità infinite siano « maggiori….d'ogni grandezza assegnabile », visto che « non si può assegnare un numero così grande che non se ne trovino altri più grandi » (Genocchi 1883b), p.194. Nello stesso senso va la critica di stravaganza che (Genocchi 1878b), p.385 muove alle nuove, complicate, definizioni di distanza e di angolo proposte da Klein.
[68] Ai quali le oscurità concettuali dei pur grandi autori citati fornivano « un'eccellente occasione di far prova del loro acume intorno ad una matassa inestricabile », (Genocchi 1883b), p.195.

che, secondo Genocchi, è la garanzia dell' « evidenza e [del] la certezza delle matematiche » che sarebbero, a suo avviso, « perdute se…..dovessero aprire le porte alle speculazioni trascendentali »[69] .
Approfondendo tali riflessioni con riferimento ad un caso teorico particolare ma di estrema importanza, Genocchi sottolinea che, in un' « exposition sérieuse et méthodique des principes de la géometrie », è inammissibile che il cruciale quinto postulato di Euclide sia accolto, appunto, come un semplice postulato[70].
Ed è ai fini di una ricostruzione metodologicamente plausibile della geometria euclidea che, a più riprese, Genocchi[71] si occupa del saggio *Sur les principes fondamentaux de la Mécanique*[72], pare ispirato direttamente da Lagrange[73], anche se pubblicato da un suo allievo, il matematico e militare savoiardo François Daviet de Foncenex.
Nell'interpretazione genocchiana, l'argomento di de Foncenex parte dall'ipotesi di due forze di uguale intensità a che danno luogo, se applicate ad un medesimo punto secondo un angolo φ, ad una risultante la cui direzione divide φ a metà e la cui intensità z dipende da a e φ nel modo descritto dalla funzione omogenea $z=af(\varphi)$[74] : il problema da risolvere è quindi la determinazione della funzione $f(\varphi)$[75].
Analogamente, se due forze parallele e di eguale intensità P si applicano ai punti A e B situati alla comune distanza x da un punto C di una leva, la forza risultante (che sostiene C) avrà un'intensità $R=Pf(x)$ [76] : il problema diviene allora la determinazione della funzione $f(x)$[77]. Poiché l'equazione di equilibrio della leva è $f(x)^2=2+f(2x)$[78], de Foncenex, pretendendo che tale equazione possa avere come soluzione solo una $f(x)$ costante[79], afferma che la soluzione cercata è $f(x)=2$[80].Da tale risultato ricava quindi che due forze, ciascuna di valore P, applicate a due punti equidistanti di

[69] (Genocchi 1883b), p.202.
[70] (Genocchi 1873a), p.190. Per una collocazione della discussione del quinto postulato di Euclide nella storia della matematica moderna ed in quella della matematica italiana del periodo, (Bottazzini 1990), pp. 167-189.
[71] (Genocchi 1869b),(Genocchi 1873a), (Genocchi 1876b), (Genocchi 1876a), (Genocchi 1878b). Di tali lavori si veda l'analisi critica e formale proposta da (Galletto 1991).
[72] (Daviet de Foncenex 1760-1761).
[73] (Genocchi 1869b), p.324.
[74] (Daviet de Foncenex 1760-1761) pp.306,320. (Galletto 1991),pp.122-123, 127, 129, 135-139 mostra l'arbitrarietà dell'ipotesi di omogeneità di z, la cui unica forma plausibile è, invece, la generica $z=f(a,\varphi)$. Tale ipotesi è rilevata ma non discussa da (Genocchi 1869b), p.325 mentre è accettata come « évidente » da (Genocchi 1878b),pp.366-367, che accoglie una giustificazione invocante l'eguale natura delle forze considerate. (Galletto 1991) dimostra, invece, che si perviene alla dimostrazione di $z=af(\varphi)$ a partire dall'ipotesi che la composizione delle forze sia associativa e commutativa, *ibidem*, pp.145-149, o, più semplicemente, dall'ipotesi che la composizione delle forze sia associativa, *ibidem*, p.149.
[75] (Daviet de Foncenex 1760-1761), pp.306-308, (Genocchi 1878b), pp.367-371. Tale soluzione è $f(\varphi)=2\cos\frac{\varphi}{2}$ il cui campo di variazione positivo mostra un valore minimo di 0 (corrispondente a $\varphi=\pi$) ed un valore massimo di 2 (corrispondente a $\varphi=0$), (Daviet de Foncenex 1760-1761), pp.307-308, (Genocchi 1878b), pp.368-369.
[76] (Daviet de Foncenex 1760-1761), p.320, (Genocchi 1869b), p.325, (Genocchi 1876a), p.157.
[77] (Genocchi 1869b), p.325, (Genocchi 1876a), pp.159-161, (Genocchi 1878b), p.372.
[78] (Daviet de Foncenex 1760-1761), p.320,(Genocchi 1876a), p.158, (Genocchi 1878b), p.372.
[79] (Daviet de Foncenex 1760-1761), p.320.
[80] (Daviet de Foncenex 1760-1761), p.320, (Genocchi 1869b), p.326, (Genocchi 1878b), p.372. Se f(x) è costante, si può porre x=0 da cui si ricava l'equazione $f(0)^2-2-f(0)=0$ la cui sola soluzione di segno positivo (cioè la sola significativa per il problema studiato) è evidentemente f(0)=f(x)=2.

una leva hanno, sulla leva, « le même effet » di una forza *2P* applicata al punto intermedio tra i due menzionati (principio della leva di Archimede)[81].
Genocchi, definendo erronea la pretesa succitata di de Foncenex[82], condivide la soluzione più generale $f(x)=b^x+b^{-x}$ con b costante[83], pervenendo a dimostrare l'esistenza di un « singolare nesso » tra la soluzione del problema dell'equilibrio di una leva e le geometrie : quella euclidea e la recentissima geometria immaginaria[84].
Si può dare, infatti, una soluzione più generale del problema mediante la formula

$$\cos\beta = \frac{f(x)}{2} sen\alpha$$

dove α e β sono gli angoli (non retti) di un triangolo ABC rettangolo in B[85].

Se in questa formula si sostituisce *f(x)* con la soluzione di de Foncenex, segue immediatamente

$$cos\ \beta = sen\ \alpha$$

implicante che gli angoli α e β sono eguali e (facendo parte di un triangolo rettangolo) complementari, « ce qui suffit pour établir le postulatum d'Euclide[86] et la géometrie euclidienne » (o parabolica) [87].
Se, invece, si sostituisce $\frac{f(x)}{2}$ con la soluzione di D'Alembert, si perviene ad ottenere

$$cos\ \beta = cos\ hx\ sen\ \alpha$$

dove h è un valore costante e reale[88] (oppure costante ed immaginario ma senza parte reale[89]) e x è il cateto opposto all'angolo β [90]. Se $h=0$, si ritorna immediatamente al caso di de Foncenex[91] e, dunque, alla geometria euclidea. Se $h = \frac{\sqrt{-1}}{r}$ (con r reale) si ottiene la geometria di

[81] (Daviet de Foncenex 1760-1761), p.320, (Genocchi 1878b), p.372.
[82] (Genocchi 1869b), p.326, (Genocchi 1878b), p.372.
[83] Proposta da d'Alembert, (Genocchi 1869b), p.326, (Genocchi 1876a), pp.159-160, (Genocchi 1878b), pp.372-373. La soluzione di de Foncenex è allora la soluzione particolare che si ottiene ponendo b=1 (Genocchi 1869b), p.326, (Genocchi 1878b), pp.373, 375.
[84] Che, secondo (Genocchi 1869b) p.326, origina dal « sommo » Gauss .
[85] (Genocchi 1878b), pp.373-374.
[86] Nella sua enunciazione originaria secondo la quale « se una retta, venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due rette », (Euclide 1970), p.71.
[87] (Genocchi 1878b), p.375.
[88] (Genocchi 1878b), p.374.
[89] (Genocchi 1876b), p.490, (Genocchi 1878b), p.376.
[90] (Genocchi 1876b), p.490.
[91] (Genocchi 1878b), p.375.

Lobatschefsky o non euclidea iperbolica (o pseudosferica)[92]. Se $h = \frac{1}{r}$, si ottiene la geometria ellittica (o sferica) [93].
La conclusione analitica che ne trae Genocchi è che il postulato di Euclide, essendo derivabile dal principio di Archimede, può essere rimpiazzato da quest'ultimo[94], di cui però non è stata finora stata data una dimostrazione teorica non circolare, prescindente cioé dalla preliminare ammissione del postulato di Euclide[95].
Genocchi, allora, indaga lo statuto metodologico del principio archimedeo e del postulato euclideo, rilevando *d'emblée* che entrambi sono stati considerati come « une proposition évidente » oppure come « un résultat de l'expérience », con alcuni « de nos contemporaines » che considerano la seconda accezione « un progrès si notable sur la première »[96].
Genocchi afferma di condividere la posizione di Helmholtz secondo cui sicuramente non è possibile dare una dimostrazione sperimentale diretta[97] del postulato di Euclide perché, incorrendo in una *petitio principii*, bisognerebbe fare uso proprio di quelle proposizioni geometriche euclidee di cui si vorrebbe dare la dimostrazione sperimentale[98] . Per contro, la verifica sperimentale diretta del principio di Archimede (che, secondo Genocchi, implicherebbe una dimostrazione sperimentale indiretta del postulato di Euclide) est « peut-être plus facile » [99].
Genocchi precisa comunque di ritenere che « l'impossibilité d'une démonstration rationnelle et rigoureuse » del postulato di Euclide sia, a sua volta, ancora da dimostrare[100] e che la dimostrabilità del postulato sia un obbiettivo raggiungibile, anche se probabilmente a partire da nozioni non geometriche ma meccaniche[101].
In ogni caso, l'impossibilità di attribuire plausibilmente un valore univoco a *h* è dovuta, secondo Genocchi, al fatto che, nei tentativi di dimostrazione finora compiuti, o si prende le mosse da definizioni imperfette oppure non si traggono, da queste ultime, tutte le implicazioni logicamente possibili. In sostanza, poiché l'esperienza e l'osservazione ci mettono a disposizione definizioni geometricamente precise (come quelle di linea retta e di piano), il trarne deduzioni contraddittorie

[92] (Genocchi 1878b), p.375. Come noto, la geometria di Lobatschefsky si fonda sul postulato che, per un punto esterno ad una retta, passano più rette parallele alla retta data, (Euclide 1970), p.72[2] (nota di Attilio Frajese).
[93] (Genocchi 1878b), p.375. Come noto, la geometria ellittica si fonda sul postulato che, per un punto esterno ad una retta, non passa alcuna retta parallela alla retta data, (Euclide 1970), p.72[2] (nota di Attilio Frajese).
[94] (Genocchi 1873a), p.185, (Genocchi 1876a), p.162, (Genocchi 1878b), p.378. Peraltro il postulato d'Euclide potrebbe essere dedotto anche dai postulati utilizzati da Newton e da D'Alembert per dimostrare il parallelogramma delle forze ed il parallelogramma delle velocità (Genocchi 1876a), pp.167-169.
[95] (Genocchi 1876a), p.162.
[96] (Genocchi 1878b), p.380.
[97] Cioé mediante misure effettive quali, ad esempio, le osservazioni astronomiche tentate da Lobatschefsky (Genocchi 1876a), p.186. Più in generale, servirebbero « expériences précises exécutées en présence des élèves », (Genocchi 1873a), p.124, (Genocchi 1876a), pp.185-186.
[98] (Genocchi 1878b), p.379.
[99] (Genocchi 1878b), p.380.
[100] (Genocchi 1873a), p.185. (Genocchi 1878a), pp.395-396 considera insufficiente l'argomento secondo cui la possibilità di costruire una geometria coerente a partire dalla negazione del postulato di Euclide basterebbe per dimostrare l'indimostrabilità di quest'ultimo. Discutibile è pure il tentativo di Hoüel e di De Tilly di dare tale dimostrazione di impossibile dimostrabilità partendo da concetti fondati proprio sul postulato di Euclide, (Genocchi 1876b), pp.492-493, (Genocchi 1878a), pp.396-402.
[101] (Genocchi 1878a), pp.402-403 appare « assez disposé à admettre » che (Flye Sainte Marie 1871), ricostruzione analitica degli assiomi della geometria senza far ricorso al postulato di Euclide, sia una dimostrazione che quest'ultimo non possa dimostrarsi a partire dagli altri assiomi geometrici.

(quali sono, appunto, le diverse geometrie originate dai diversi possibili valori di *h*) indica che i ragionamenti cui si è fatto ricorso non sono sufficientemente rigorosi[102].
Alla luce di tali probabili vizi logici, la discussione sulle varie geometrie sembra allora a Genocchi poco proficua, tanto più che Beltrami[103] avrebbe dimostrato, secondo Genocchi (e contrariamente alle opinioni più diffuse), che la geometria euclidea permette di ottenere gli stessi risultati conseguiti dalle geometrie non euclidee[104], consentendo così di « [s'en passer] très bien de ce nouvel échafaudage»[105].
Tuttavia se il postulato di Euclide, oltre che indimostrabile empiricamente, risultasse anche indimostrabile teoricamente e non evidente[106], allora non ci si sarebbe modo di liberarsi delle geometrie non-euclidee. Queste ultime sono, peraltro, anch'esse fondate su postulati, uno dei quali (precisamente la pseudo-sfera che fonda la geometria iperbolica) appare a Genocchi ancora « plus difficile à accorder que celui d'Euclide »[107].

3. I contenuti degli insegnamenti di Genocchi seguiti da Pareto

Vediamo ora come, alla luce dei suoi orientamenti epistemologici e dei programmi ministeriali, Genocchi presentò l'algebra complementare (unitamente alla geometria analitica) ed il calcolo differenziale ed integrale ai suoi studenti degli a.a. 1864-1865 e 1865-1866, tra i quali vi fu Pareto. Dei due corsi abbiamo, sinora, una conoscenza documentaria ben diversa. Infatti, di quello di algebra complementare e geometria analitica, che Pareto seguì nel primo anno di università, ci è pervenuto solo il programma di esame[108], mentre di quello di calcolo

---

102 (Genocchi 1876a), pp.173-175.
103 Segnatamente (Beltrami 1868a), (Beltrami 1868b). Per una breve introduzione storico-analitica alle geometrie non-euclidee (Bottazzini 1994), pp.146-150. Sul vivace dibattito intercorso tra Genocchi e Beltrami a riguardo della geometria ipebolica, (Fenoglio L. and Giacardi 1991), segnatamente pp.170-179
104 (Genocchi 1873a), pp.191-192, (Genocchi 1878b), pp.383-384.
105 (Genocchi 1878b), p.385.
106 Ed in effetti esso appare formulato in un modo tutt'altro che soddisfacente, non rispondendo a quei criteri di chiarezza e di fecondità che consentono di «rendre à la fois les traités élémentaires plus courts et plus méthodiques », (Genocchi 1876a), p.186. Tale situazione potrebbe incoraggiare tentativi, che (Genocchi 1873a), p.191 ritiene comunque di secondaria importanza, di cercare un nuovo postulato « plus simple et plus facile à admettre » da cui dedurre la geometria euclidea.
107 In (Genocchi 1873a), pp.185-186, (Genocchi 1876a), p.162, (Genocchi 1878a), pp.392, 395 si afferma che della pseudo-sfera non è ancora possibile dare né una rappresentazione geometrica né una rappresentazione in termini di un'equazione alle differenze parziali integrabile.
108 Da Regia Università degli Studi di Torino-Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, anno scolastico 1863-64, Programma per gli esami speciali di Algebra complementare e Geometria analitica desumiamo che l'algebra complementare insegnata da Genocchi si è articolata sulla teoria delle equazioni (*ibidem*, argomenti nn.1-14), su elementi del calcolo delle differenze (*ibidem*, nn.15-22), e sul concetto di serie (*ibidem*, nn.23-25). Dal canto suo, l'esposizione della geometria analitica parte dalle definizioni, formulate inizialmente mediante le coordinate cartesiane, della posizione di un punto e della distanza di due punti in un piano, per poi diffondersi sulla rappresentazione, algebrica e geometrica, di luoghi geometrici quali la linea retta, il cerchio, l'ellisse, l'iperbole e la parabola e sull'individuazione geometrica delle radici reali di una qualunque equazione ad una sola incognita o comuni a più equazioni fra più incognite (*ibidem*, nn.26-39). Riformulata la geometria analitica del piano mediante le coordinate polari e le coordinate di Plücker (*ibidem*, argomenti nn.40-42), viene, quindi, sviluppata la geometria analitica dello spazio, partendo dalle definizioni di un punto, di una retta e di un piano nello spazio, per poi passare alle definizioni della trigonometria sferica ed alla formulazione delle equazioni di ellissoidi, paraboloidi, iperboloidi, superfici coniche, cilindriche e sferiche nonché delle modalità da seguire per la loro rappresentazione spaziale (*ibidem*, argomenti nn.43-51). Pareto sostenne l'esame di algebra complementare e geometria analitica l'8 luglio 1865 , discutendo gli argomenti nn.16 e 19 (« La differenza m^{sima} d'una funzione intera di grado *m* è costante, se è tale la differenza della variabile. Formola d'interpolazione di Newton. Maniera di calcolar i valori delle funzioni

infinitesimale, da lui seguito nel secondo anno, possediamo una documentazione molto ampia. Essa si articola non solo sul noto manuale « Genocchi-Peano » (pubblicato nel 1884)[109] ma anche sul programma di esame[110], su un ampio frammento olografo[111] e sulla trascrizione che, dell'edizione completa 1871-1872, venne fatta da uno studente anonimo[112], con capitoli aventi la stessa intestazione degli argomenti del programma. Perseguendo obbiettivi di eziologia dell'epistemologia paretiana, ricostruiremo il corso di calcolo infinitesimale a partire dal frammento e dalla trascrizione menzionati in quanto che i due documenti, pur nella loro minore organicità espositiva (e forse minore significatività teorica) rispetto al « Genocchi-Peano », ci offrono una testimonianza più vicina nel tempo (e quindi, verosimilmente, nei contenuti) del modo in cui tale disciplina venne presentata a Pareto.

È fondamentale precisare che, verosimilmente a seguito dell'influenza esercitata su Genocchi da Chiò (che fu anche il principale allievo torinese di Cauchy), il corso genocchiano di calcolo infinitesimale appare agli storici ricalcato sul *Cours d'Analyse* di Cauchy[113] il quale, seppur antecedente di un quarantennio, costituiva ancora il meglio della manualistica internazionale del

---

intere mediante le differenze » ; « Eliminazione tra equazioni d'un grado qualunque. Metodo di eliminazione dipendente dalle funzione simmetriche. Metodo di Sylvester. Grado della risultante. Come si liberi un'equazione dai radicali », *ibidem*) e venendo approvato con 27/30, Archivio Storico dell'Università di Torino, Verbale degli esami speciali. Algebra complementare e geometria analitica, X.D., 54, p.50.

109 (Genocchi 1884a). Di tale volume, che secondo (Peano 1890), p.6 era una riproduzione delle trascrizioni studentesche del corso genocchiano accresciute con integrazioni peaniane, (Genocchi 1885) disconobbe immediatamente la paternità. Peraltro nella lettera a Cremona del 23 novembre 1884 recentemente scoperta (Carbone, Gatto et al. 2001), p.211), Genocchi riabilita sostanzialmente Peano, riconoscendo che non mirasse a fini speculativi e, soprattutto, ritenendo che la sua intenzione fosse quella di « accrescere [con le sue aggiunte] il pregio dell'opera, e quindi di fare al mio nome piuttosto un vantaggio che un danno ».

110 Regia Università degli Studi di Torino-Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, anno scolastico 1865-66, Programma per gli esami speciali di calcolo differenziale ed integrale. Pareto sostenne l'esame di calcolo infinitesimale il 26 giugno 1866, discutendo gli argomenti nn.6 e 8 (« Definizione degli esponenziali, dei logaritmi e delle funzioni circolari nel caso d'una variabile immaginaria. Applicazione delle regole comprese nei numeri precedenti alle funzioni immaginarie » ; « Determinazione dei valori che si presentano sotto forma indeterminata. Teorica de' massimi e minimi», *ibidem*) e venendo approvato con 30/30, Archivio Storico dell'Università di Torino, Verbale degli esami speciali. Analisi matematica ; Calcolo infinitesimale, X.D., 57, p.75.

111 (Genocchi 1865-1866) (che ci informa direttamente sulla trattazione genocchiana dei primi sette argomenti previsti da Regia Università degli Studi di Torino-Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, anno scolastico 1865-66, Programma per gli esami speciali di calcolo differenziale ed integrale cit.) è conservato nella sala manoscritti della Biblioteca Civica di Piacenza di cui ringrazio il responsabile, il dr.Massimo Baucia, per la preziosa e paziente collaborazione accordatami. Il manoscritto venne molto probabilmente scritto da Genocchi per adempiere all'obbligo, che l'art.27 del summenzionato regolamento universitario generale imponeva ai professori, di redigere i programmi dei corsi che dovevano « contenere un compendio degli insegnamenti, nei quali saranno esposte, nell'ordine più conveniente per l'intelligenza e per il profitto degli studenti e nella misura richiesta dalla durata dei corsi, le parti meglio accertate della scienza ».

112 (Anonimo 1871-1872a) e (Anonimo 1871-1872b) che ci informano, per quanto mediatamente, sui restanti venticinque capitoli di Regia Università degli Studi di Torino-Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, anno scolastico 1865-66, Programma per gli esami speciali di calcolo differenziale ed integrale, cit.. Ritrovati dal professor Mario Umberto Dianziani, già rettore dell'ateneo subalpino, tali *cahiers de notes* sono ora conservati al Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino: ne devo la consultazione all'amichevole cortesia della prof.ssa Livia Giacardi.

113 Di (Genocchi 1865-1866) (Bottazzini 1991), pp.38-57 discute i concetti di limite, continuità e derivazione di funzione, di convergenza di una serie e di variabile complessa, confrontandoli con le trattazioni datane da (Cauchy 1821) e da Peano in (Genocchi 1884a). Dal canto suo, (Borzieri 1999) presenta un dettagliato confronto analitico tra (Anonimo 1871-1872a), (Anonimo 1871-1872b) e (Genocchi 1884a).

settore, visto che i nuovi sviluppi dell'analisi apportati da Weierstrass erano pochissimo conosciuti fuori dei suoi corsi berlinesi[114].

3.1 Differenziazione delle funzioni esplicite di una sola variabile reale

Genocchi inizia la sua esposizione dell'analisi infinitesimale, che concepisce come lo studio dei cambiamenti che una funzione subisce « quando i valori delle variabili da cui dipende variano per gradi piccolissimi »[115], costruendo l'argomento della differenziazione delle funzioni esplicite d'una sola variabile reale.
Se *f(x)* è una funzione intera di *x*, *m* il grado di *f(x)*, *h* un incremento positivo (o negativo) dato a *x* , dall'algebra si ottiene l'espressione :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f^{'}(x)+\frac{h}{1\cdot 2}f^{''}(x)+\frac{h^{2}}{2\cdot 3}f^{'''}(x)+.....\frac{h^{n}}{1\cdot 2\cdot \cdot n}f^{n}(x)$$

la cui proprietà fondamentale, di cui godono (eccezion fatta per alcuni valori « individuali e staccati ») tutte le funzioni che si possono formare per mezzo delle operazioni analitiche note, è che $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ « tende verso un *limite* determinato e finito mentre l'incremento della variabile tende verso zero »[116]. Tale limite, formalizzato con $f^{'}(x)$, è denominato *derivata* e nella ricerca di quest'ultima, che inizia dalla dimostrazione che la derivata « quando esiste non può avere più valori distinti », consiste il calcolo differenziale [117].
Ridenominato *differenziale* di *x* (e formalizzatolo con *dx*) l'incremento *h*, si definisce *differenziazione* l'operazione che determina il *differenziale* della funzione y e che viene indicata con

$$dy=f^{'}(x)dx$$ [118].

[114] (Bottazzini 1991), pp.39-42
[115] (Genocchi 1865-1866), foglio 1, p.1.
[116] (Genocchi 1865-1866), foglio 1, pp.1-2.
[117] (Genocchi 1865-1866), foglio 1, pp.2-3. È interessante rilevare che, in questa prima parte (ma fondante) del corso, è solo dopo aver definito la derivata di una funzione che Genocchi tratta della sua continuità, asserendo che una funzione *y=f(x)* è *continua* se ha « un valore unico e ….reale per ogni valore della variabile » e se *f(x+h)+f(x)* è infinitesima con *h*, cioé qualora sia $|f(x+h)-f(x)|$<ε, per un « valore di h [positivo o negativo] abbastanza piccolo » e con ε rappresentante una quantità data qualsiasi. Se ne deduce che se, per *x=a*, la derivata della funzione ha un valore determinato e finito, allora *f(x+h)+f(x)* vi è infinitesima con *h*, il che implica che « la funzione sarà continua in prossimità » di *a*, (Genocchi 1865-1866), foglio 5, pp.1-2. Invece, « la proposizione reciproca, per la quale una funzione continua dovrebbe sempre avere una derivata, non è facile a dimostrarsi » in quanto implicherebbe la dimostrazione che, in un punto in cui la funzione fosse continua, il limite di $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ non solo non potrebbe tendere « costantemente » né « verso l'infinito » né « verso zero » ma neppure « oscillare fra diversi limiti »(Genocchi 1865-1866), foglio 5, p.1.
[118] (Genocchi 1865-1866), foglio 2, p.1.La formula consente di esprimere la derivata anche come $f^{'}(x)=\frac{dy}{dx}$ (dove il secondo membro è denominato *quoziente differenziale*). Inoltre, poiché $f^{'}(x)$ è pure una funzione di *x* avrà anch'essa la sua derivata, $f''(x)$, denominata derivata seconda o di second'ordine di *f(x)*, e così via. Il prodotto della derivata *nsima* di *f(x)* per *la nsima* potenza di dx si chiamerà differenziale *nsimo* di *y* e si scriverà $d^{n}y=f^{n}(x)dx^{n}$,

Genocchi dimostra quindi *le regole di differenziazione* delle funzioni *esplicite ad un sola variabile reale*[119], facendo uso dei limiti notevoli $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, $\lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\alpha}{\alpha} = 1$ (che ha precedentemente dimostrato) e del « principio » (non dimostrato) che il limite del prodotto di più fattori è il prodotto dei limiti[120].
Genocchi segue una procedura dimostrativa che si articola, coerentemente con le definizioni appena ricordate, sui seguenti passaggi :

assegnata $y=f(x)$, utilizzare $\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per ottenere $f^{'}(x)$;
mediante $f^{'}(x)$ e la definizione $dy = f^{'}(x)dx$, ottenere dy.
Tale procedura è inizialmente applicata ad una classe di funzioni *semplici*, definite come quelle « da cui si cerca di far dipendere tutte le altre »[121], ottenendo :
da y=logx, $dy = \frac{1}{x}dx$;
da $y = a^{x}$ (con a costante positiva), $dy = a^{x}\frac{\log a}{\log e}dx$ che, per a=e, diviene $dy = e^{x}dx$;
da $y = x^{m}$ (con x positivo e m costante qualsiasi), $dy = mx^{m-1}dx$;
da $y = senx$, $dy = \cos xdx$;
da $y = \cos x$, $dy = -senxdx$;
da $y = \tan gx$, $dy = \frac{1}{\cos^{2}x}dx$[122].
La seconda classe di funzioni è rappresentata da $x=\varphi(y)$, definita come la *funzione inversa* di $y=f(x)$: si otterrà $\varphi^{'}(y)dy = dx$[123].
La terza classe di funzioni è rappresentata da $y=f(u)$ ed $u=\varphi(x)$ implicanti la definizione di y quale *funzione di funzione* di x: se esistono tanto $f^{'}(u)$ quanto $\varphi^{'}(x)$, si otterrà $dy = f^{'}(u)\varphi^{'}(x)dx$[124].
La quarta ed ultima classe di funzioni esplicite di una sola variabile reale è quella delle *funzioni composte*, intese come funzioni « espress[e] con due o più quantità che sono funzioni della [stessa] variabile indipendente »[125]. Se, per esempio, $u = f(x), v = \varphi(x)$, $w = \psi(x)$, si otterrà:
da $y = u+v+w$, $dy = f^{'}(x)dx + \varphi^{'}(x)dx - \psi^{'}(x)dx$;
da $y = uv$, $dy = u\frac{dv}{dx}dx + v\frac{du}{dx}dx$;

---

con $d^{n}y$ che si ottiene mediante la differenziazione di $d^{n-1}y$ considerando dx^{n-1} costante, (Genocchi 1865-1866), foglio 7, pp.3-4.
119 (Genocchi 1865-1866), foglio 4, p.4.
120 (Genocchi 1865-1866), foglio 2, pp.2,4.
121 (Genocchi 1865-1866), foglio 2, p.2.
122 (Genocchi 1865-1866), foglio 2, pp.2-4. Le altre funzioni trigonometriche « si possono tutte far dipendere dalle precedenti » *ibidem*.
123 (Genocchi 1865-1866), foglio 3, p.2.
124 (Genocchi 1865-1866), foglio 3, pp.3-4.
125 (Genocchi 1865-1866), foglio 4, p.1.

da $y=\frac{u}{v}, dy=\frac{1}{v^2}(v\frac{du}{dx}dx-u\frac{dv}{dx}dx)$;
da y=u^v, $du^v=vu^{v-1}\frac{du}{dx}dx+u^v \log u\frac{dv}{dx}dx$ [126].
Le regole di differenziazione servono per la « ricerca delle radici reali delle equazioni trascendenti, argomento d'utilità anche pratica », ricerca condotta con metodi che Genocchi espone brevemente [127].
Genocchi ritorna poi all'espressione di partenza della sua esposizione del calcolo differenziale

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f^{'}(x)+\frac{h}{1\cdot 2}f^{''}(x)+\frac{h^2}{2\cdot 3}f^{'''}(x)+.....\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot \cdot n}f^n(x)$$

per ricordare che essa è valida solo per le funzioni intere e per segnalare (senza dimostrarlo) che, se *f(x)* non è una funzione intera, « nessuna delle sue derivate successive [all'*msima*] può annullarsi fuorché per valori particolari di x», con la conseguenza che il secondo termine dell'espressione costituirà « una serie infinita », di cui si tratterà di stabilire se possa ancora « rappresentare *f(x+h)* »[128].
La questione viene affrontata ponendo *x+h=a* ed aggiungendo, dopo *n+1* termini del secondo membro, un termine completivo (o resto) *R* « che renda esatta l'equazione » ed il cui valore sarà evidentemente :

$$R=f(a)-f(x)-(a-x)f^{'}(x)-\frac{(a-x)^2}{1\cdot 2}f^{''}(x)......-\frac{(a-x)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^n(x)^{129}.$$

Se *a* e x sono valori finiti e sono finite e determinate le funzioni $f^{'}(x).....f^n(x), f^{n+1}(x)$, *R* è una funzione di *x* differenziando la quale (con *a* considerata costante) si ottiene $\frac{dR}{dx}=-\frac{(a-x)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{n+1}(x)$ [130]. Una volta attribuito a *x* il valore x_0, se nell'intervallo che va da x_0 ad *a* $\frac{dR}{dx}$ « avrà....un valore assoluto che decresce indefinitamente al crescere di n ......si potrà dedurre che il valore assoluto di R ....per n infinito si annulla », con la conseguenza che il

---

[126] (Genocchi 1865-1866), foglio 4, pp.1-4.
[127] Genocchi ricorda, in primo luogo, il metodo di approssimazione di Newton, secondo il quale se *a+h* è una delle radici reali, *a* è un valore vicino a *a+h* e *0<θ<1*, dalla formula $f(a+h)-f(a)=hf^{'}(a+\theta h)$ si perverrà alla $-f(a)=hf^{'}(a+\theta h)$ da cui si otterrà $h=-\frac{f(a)}{f^{'}(a)}$ (potendo *θh* trascurarsi rispetto ad a), che consentirà appunto di stabilire « un valore più approssimato » di *a+h* (Genocchi 1865-1866), foglio 7, p.1.Il secondo metodo consiste nell'applicazione del teorema di Rolle : se *a* è una delle radici reali e si prende « *h* così piccolo che $f^{'}(a+\theta h)$ e $f^{'}(a+h)$ abbiano lo stesso segno », dalla formula $f(a+h)-f(a)=hf^{'}(a+\theta h)$ si perverrà alla $f(a+h)=hf^{'}(a+h)$ che consentirà di notare come, « in prossimità d'una radice reale *a* », *f(x)* e $f^{'}(x)$ avranno lo stesso segno per *x>a* (cioé per *h* positivo) e segni opposti per *x<a* (cioé per *h* negativo), (Genocchi 1865-1866), foglio 7, pp.1-2.
[128] (Genocchi 1865-1866), foglio 8, p.1.
[129] (Genocchi 1865-1866), foglio 8, p.1.
[130] (Genocchi 1865-1866), foglio 8, p.1.

secondo termine dell'espressione summenzionata sarà convergente consentendo infine di scrivere[131]

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(x) ...... + \frac{h^n}{1.2\cdots n} f^n(x) + R$$

Tale formula rappresenta il « teorema di Taylor » del quale Genocchi espone alcune applicazioni[132].

3.2 Differenziazione delle funzioni esplicite di più variabili reali

La prima estensione che Genocchi fa dei principi del calcolo differenziale riguarda la loro applicazione alla classe delle *funzioni esplicite di più variabili reali*. Il punto di partenza è l'introduzione della nozione secondo cui la funzione *u=f(x,y,z....)* è *continua* in « prossimità dei valori $x_0, y_0, z_0 ......$ se $\left| f(x_0+h, y_0+k, z_0+l, ...) - f(x_0, y_0, z_0, ...) \right| < \varepsilon$, « per certi valori di h,k,l,…» e con ε rappresentante « un numero piccolo quanto si voglia »[133].
Se si considera la *u=f(x,y,z....)* funzione della sola *x* (della sola *y*,….) con le altre variabili costanti si determinerà, servendosi delle regole esposte nel caso di una sola variabile indipendente, la *derivata parziale* di u rispetto a x (rispetto a y, ….) che si potrà « denotare » con $\frac{du}{dx} = f'_x(x,y,.....)$ ($\frac{du}{dy} = f'_y(x,y,.....)$, etc) . Se si moltiplica la *derivata parziale* di *u* rispetto a *x* (rispetto a *y*, etc) per il *differenziale* di *x* (di *y*, etc), si ottiene il *differenziale parziale* di u rispetto a *x* (rispetto a *y*,….) che si può scrivere come $d_x u = \frac{du}{dx} dx$ ($d_y u = \frac{du}{dy} dy$, …..)[134] .
Le *derivate parziali di ordine superiore* si ottengono derivando, rispetto alle stesse o a differenti variabili , le derivate parziali di ordine inferiore, con l'ordine della nuova derivata ottenuta che è determinato dal numero delle derivazioni compiute : per esempio si ottiene $\frac{d^2u}{dx^2} = f''_{xx}(x,y.....)$,

[131] Ricordando che si è posto *f(a)=f(x+h)*.

[132] Si tratta : della formula del binomio la quale, ogni qualvolta sia convergente la serie esprimente l'*R* di x^m , consente, posti *y=a+x* e $\frac{x}{a} = t$, di ottenere $(a+x)^m = a^m(1+t)^m$ (Genocchi 1865-1866), foglio 8, p.4, foglio 9, pp.1-3 ; della serie logaritmica la quale, ogni qualvolta sia convergente la serie esprimente l'*R* di *logx*, consente, posto $\frac{1-x}{x} = t$, di ottenere la serie $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + ...$ che, ulteriormente sviluppata, permette di calcolare, per approssimazione, le tavole logaritmiche, (Genocchi 1865-1866), foglio 9, p.4, foglio 10, p.1, 4, foglio 11, pp.1-2. Infine, se nel teorema di Taylor si pongono successivamente *x=a*, *h=x-a* e *a*=0, otterremo $f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 f''(0) ......$, formula che costituisce il « teorema di Mac Laurin » e che consente di calcolare, per approssimazione, i valori di a^x , e^x , *senx*, *cosx* corrispondenti ai valori reali di x nonché risolvere le equazioni del tipo *f(x)*=0, in cui f(x) sia svolgibile in serie di Mac Laurin, (Genocchi 1865-1866), foglio 10, pp.1-3.

[133] (Genocchi 1865-1866), foglio 11, p.3.

[134] (Genocchi 1865-1866), foglio 11, p.3. (Genocchi 1865-1866), foglio 11, p.4 ritiene tale formulazione « più semplice » di quella alternativa $d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ($d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy$, ….) .

$\dfrac{d^2u}{dxdy} = f''_{yx}(x, y, ...)$, etc.[135]. Moltiplicando le derivate parziali di ordine superiore per i differenziali delle variabili rispetto alle quali si è compiuta la derivazione si perviene ai corrispondenti *differenziali parziali di ordine superiore* che, negli esempi dati, saranno $d_x{}^2u = \dfrac{d^2u}{dx^2}d^2x$ e $d_xd_yu = \dfrac{d^2u}{dxdy}dxdy$. A quest'ultimo riguardo, « è importante avvertire che dovendo differenziarsi rispetto a più variabili si può cominciare dall'una o dall'altra come aggrada, poiché il risultato è sempre lo stesso »[136].

Il *differenziale totale* di prim'ordine di una funzione di più variabili è la « somma di tutti i [suoi] differenziali parziali di prim'ordine », cioé $du = d_xu + d_yu + ...$. Più in generale, *il differenziale totale d'ordine n* di tale funzione si ottiene « prendendo il differenziale totale di ciascun termine del differenziale [di ordine n-1] e sommando » : sarà quindi $d^nu = (d_xu + d_yu + ...)^n$ [137].

3.3 La differenziazione di funzioni esplicite di variabili immaginarie

La seconda estensione dei principi del calcolo differenziale riguarda le *funzioni di variabili immaginarie*. A tal fine, secondo Genocchi, occorre che si proceda preliminarmente alla precisa definizione di tali funzioni[138], che dimostra essere la seguente:

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\, seny);$$
$$sen(x + y\sqrt{-1}) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} senx - \frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x\sqrt{-1};$$
$$\cos(x + y\sqrt{-1}) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - \frac{e^y - e^{-y}}{2} senx\sqrt{-1}$$ [139];

se r è il modulo e φ l'argomento della variabile immaginaria z[140], si ottiene $z = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}sen\varphi)$ da cui si perviene a $\log z = \log r + (\varphi + 2n\pi)\sqrt{-1}$ che, essendo « n un numero intero qualsivoglia, positivo o negativo compreso lo zero » assume infiniti valori immaginari[141].

Indi, Genocchi afferma che una variabile immaginaria $z = x + y\sqrt{-1}$ « si deve considerare equivalente a due variabili indipendenti reali.... [poiché] gli incrementi prodotti dal variare di x e[/o] dal variare di y sul valore di z non si confondono mai l'uno coll'altro » traendone che una

135 (Genocchi 1865-1866), foglio 11, p.4, foglio 12, p.1.

136 Il teorema viene dimostrato nel caso *u=f(x,y)*, supponendo « che le derivate $f''_{x,y}(x,y)$, $f''_{y,x}(x,y)$ siano continue in prossimità dei valori che si vogliono attribuire ad x e y », (Genocchi 1865-1866), foglio 12, pp.1-3.

137 (Genocchi 1865-1866),], foglio 12, p.4, foglio 14, pp.2-3.(Genocchi 1865-1866), foglio 15, pp.1-4 dimostra che i teoremi di Taylor e di Mac Laurin si applicano anche alla presente classe di funzioni.

138 (Genocchi 1865-1866), foglio 16, p.1.

139 (Genocchi 1865-1866),], foglio 16, pp.1-3. Dalle definizioni del seno e coseno si dedurranno quelle delle altre funzioni trigonometriche di variabili immaginarie, (Genocchi 1865-1866), foglio 16, pp.2-3, foglio 17, pp.1-2.

140 Dato il numero immaginario z=a+bi, per modulo si intende il valore $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e per argomento si intende l'angolo φ, per il quale si abbia cosφ=$\frac{a}{r}$ e senφ=$\frac{b}{r}$.

141 (Genocchi 1865-1866), foglio 16, pp.3-4.

funzione di una variabile immaginaria può essere differenziata, tenendo conto che $\sqrt{-1}$ è una costante, rispetto alle variabili reali che vi sono presenti consentendo di formarne il differenziale totale[142].

Per esempio : se $z = x + y\sqrt{-1}$, si ottiene $de^{z} = e^{x}(\cos y + \sqrt{-1} seny)(dx + dy\sqrt{-1}) = e^{z} dz$; se $z = r(\cos\varphi + \sqrt{-1} sen\varphi)$ si ottiene $dz = z(\frac{dr}{r} + \sqrt{-1} d\varphi)$ cioé $d\log z = \frac{dz}{z}$. In entrambi i casi, quindi, si ottiene lo stesso risultato che si otterrebbe qualora « la variabile z fosse reale e si conoscesse il differenziale della funzione ». In generale, poiché tutte le regole per differenziare le funzioni di variabili reali « furono dedotte da semplici identità e da principii noti intorno ai limiti », tali regole « varranno egualmente » per le funzioni di una o più variabili immaginarie [143].

3.4 La differenziazione delle funzioni implicite

Genocchi, infine, estende i principi del calcolo differenziale alle *funzioni implicite*, definite come quelle di cui non è nota l'espressione analitica e che, pertanto, vengono espresse con la forma generale f(x,y)=0, il cui primo membro si può differenziare rispetto alle variabili[144] dando luogo al differenziale totale di primo ordine $f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy = 0$[145], da cui si ricava $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}$[146]. Poichè $\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y)$, con y funzione di x, si otterrà anche $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi_x(x,y)dx + \varphi_y(x,y)\frac{dx}{dy}$[147].

Analogamente, date due funzioni implicite f(x,y,z)=0 e F(x,y,z)=0, se si determina ad arbitrio una delle tre variabili (p.e.*x*) le altre due (nel nostro caso *y,z*) ne diventeranno funzioni, le cui derivate si otterranno risolvendo rispetto a $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ il sistema di equazioni differenziali

$$f_x'(x,y,z) + f_y'(x,y,z)\frac{dy}{dx} + f_z'(x,y,z)\frac{dz}{dx} = 0$$

$$F_x'(x,y,z) + F_y'(x,y,z)\frac{dy}{dx} + F_z'(x,y,z)\frac{dz}{dx} = 0$$ [148].

3.5 Applicazioni dei principi del calcolo differenziale

Il resto della parte del corso dedicata al calcolo differenziale ne propone diverse applicazioni, le prime due di carattere analitico, le restanti di carattere geometrico.

---

142 (Genocchi 1865-1866), foglio 17, pp.3-4.

143 (Genocchi 1865-1866), foglio 17, p.4, foglio 18, pp.1-3. (Genocchi 1865-1866), foglio 19, pp.2-3, dimostra che il teorema di Taylor è valido anche per una variabile immaginaria, applicandolo segnatamente allo sviluppo in serie di x^m e di logx, (Genocchi 1865-1866), fogli 19, pp.3-4, 20, pp.1-4.

144 (Genocchi 1865-1866), foglio 21, p.1.

145 Differenziando il quale si ottengono i differenziali di ordine superiore $d^2 f = 0$, $d^3 f = 0$,(Genocchi 1865-1866), foglio 24, pp.2-3.

146 (Genocchi 1865-1866), foglio 22, p.1.

147 (Genocchi 1865-1866), foglio 22, pp.2-3.

148 (Genocchi 1865-1866), foglio 22, p.4, foglio 23, p.1. Il sistema si risolverà se il determinante dei coefficienti delle derivate parziali sarà diverso da zero (Genocchi 1865-1866), foglio 23, p.2.

La prima applicazione analitica riguarda la determinazione del « vero valore » di funzioni che, per certi valori della variabile indipendente, si presentino sotto le forme indeterminate $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$[149].

Se, per $x=x_0$, si ha $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}=\frac{0}{0}$ o $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}=\frac{\infty}{\infty}$, si perverrà (se le derivate di $f(x)$ e di $\varphi(x)$ sono determinate)[150] alla formula $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$ che, qualora permanesse nella forma indeterminata, potrebbe essere ulteriormente derivata per verificare se almeno uno, tra il numeratore ed il denominatore, diventi non nullo[151].

La seconda applicazione analitica riguarda la teoria dei massimi e dei minimi delle funzioni.

Data una funzione $y=f(x)$, non si intenderà « per il massimo (per il minimo) » della stessa « il più grande (il più piccolo) ….fra tutti i valori che essa può assumere ». Invece, si intenderanno per massimi (minimi) della funzione quei valori per i quali la funzione « da crescente diviene decrescente (da decrescente diviene crescente) » [152].

Quindi, per il valore x_0 la funzione avrà un valore massimo (minimo) se « la derivata prima da positiva sta per passar[vi] negativa (da negativa sta per passar[vi] positiva) », cioé se $f'(x_0)=0$, e, per il teorema di Taylor, se la prima derivata superiore non nulla con n pari è $f^n(x_0)<0$ ($f^n(x_0)>0$)[153]. Analogamente, la funzione $u=f(x,y)$, per la coppia di valori x_0 e y_0, avrà un valore massimo (minimo) se, per tale coppia, saranno $\frac{du}{dx}=0, \frac{du}{dy}=0$ e le prime derivate superiori non nulle con n pari saranno $\frac{d^n u}{dx^n}<0, \frac{d^n u}{dy^n}<0$ con $\frac{d^n u}{dxdy^{n-1}}$ di segno opposto a quello di $dxdy$ ($\frac{d^n u}{dx^n}>0, \frac{d^n u}{dy^n}>0$, con $\frac{d^n u}{dxdy^{n-1}}$ dello stesso segno di $dxdy$)[154] .

Da completare con l'esame delle applicazioni geometriche del calcolo differenziale…….

3.6 Elementi del calcolo integrale

Genocchi presenta il calcolo integrale come l'inverso di quello differenziale : nel calcolo differenziale, data la funzione $F(x)$ si cerca la funzione $f(x)$ che ne è la derivata, mentre, nel calcolo integrale, data la funzione $f(x)$ si cerca la funzione $F(x)$ di cui $f(x)$ è la derivata.

---

149 (Anonimo 1871-1872a), p.255.

150 (Anonimo 1871-1872a), pp.263-264.

151 (Anonimo 1871-1872a), pp.256-263. Alle forme indeterminate menzionate, e quindi alla loro procedura risolutiva, si possono ricondurre altresì le forme indeterminate $0\cdot\infty$, $\infty\cdot 0$, ∞-∞ , 0^0, ∞^0, 1^∞ , (Anonimo 1871-1872a), pp.266-272.

152 (Anonimo 1871-1872a), p.273. (Genocchi 1865-1866), foglio 5, pp.3-4 definisce crescente (decrescente) una funzione il cui incremento infinitesimo sia del segno medesimo (opposto) dell'incremento della variabile indipendente da cui rucava che se la derivata è positiva (negativa) la funzione è crescente (decrescente).

153 (Anonimo 1871-1872a), pp.273-281.

154 (Anonimo 1871-1872a), pp.286-287. Le suddette regole per individuare i massimi ed i minimi saranno valide non solo per le funzioni esplicite ma anche per quelle implicite ,(Anonimo 1871-1872a), pp.284, 301-303. Genocchi ne illustra l'utilizzo risolvendo i seguenti problemi :« essendo dato il lato del triangolo generatore di un cono di rivoluzione, trovare quale debba essere il raggio della base affinché il volume del cono sia il massimo possibile », (Anonimo 1871-1872a), pp.283-284 ;« trovare la minima distanza di un punto da un piano », (Anonimo 1871-1872a), pp.290-293 ;« cercare la più breve distanza di due rette nello spazio », (Anonimo 1871-1872a), pp.293-296.

Ciò precisato si dimostra graficamente che, data *f(x)* « continua almeno in un certo intervallo », *F(x)* esiste sempre[155] anche se, analiticamente, « non è sempre tale che si possa trovar[la] »[156]. Indi, preso un arco continuo sulla curva rappresentante *f(x)*, si determinerà « un'area chiusa », delimitata dall'arco e dal segmento corrisponente dell'asse delle ascisse, la cui « estensione » sarà una funzione *F(x)* dell'ascissa dell'estremo superiore dell'arco: la derivata di *F(x)* è l'ordinata *f(x)*. Poiché l'estremo inferiore dell'arco può prendersi arbitrariamente, vi sarà un numero infinito di *F(x)* condividenti la stessa stessa derivata *f(x)* e che differiscono tra loro solo per aree chiuse, cioé per costanti. Perciò *F(x)* si chiama l'integrale indefinito di *f(x)* e si rappresenta $\int f(x)dx = F(x) + C$, dove C è una costante arbitraria : se si assegna un valore numerico alla costante, l'integrale indefinito da generale diventa particolare. Se si assegna un valore numerico anche all'estremo inferiore, l'integrale diventa definito[157].
Ai fini della dimostrazione delle regole di integrazione[158], le funzioni sono suddivise in algebriche (razionali ed irrazionali) ed in trascendenti. L'esposizione delle regole per le funzioni algebriche razionali inizia con la dimostrazione che, per *n* intero positivo o negativo, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$[159].

Da completare con l'esame delle restanti regole di integrazione delle funzioni, delle regole di integrazione delle equazioni differenziali e delle loro applicazioni geometriche…..

4. Un profilo della concezione paretiana del ruolo della matematica nella scienza in generale e nell'economia politica in particolare

Esposte una prima interpretazione dell'epistemologia di Genocchi ed una proposta di lettura sintetica del suo corso di calcolo infinitesimale, in questo paragrafo cercheremo di abbozzare un'interpretazione, del tutto schematica e *tentative ma complessiva*, della concezione che Pareto ha del ruolo della matematica nella scienza in generale e nell'economia politica in particolare.
Già al termine della sua formazione universitario-politecnica Pareto ritiene che ogni scienza, compresa la matematica, si fondi su principi conosciuti solo grazie ad « una lunga sperienza »[160]. Si tratta della sua prima, importante presa di posizione epistemologica che dice di condividere con Jakob Moleschott[161], il noto fisiologo olandese dall'inizio degli anni sessanta docente nell'ateneo torinese. Moleschott, contestando partitamente la concezione kantiana della

155 (Anonimo 1871-1872b), p.1.
156 (Anonimo 1871-1872b), p.7.
157 (Anonimo 1871-1872b), pp.2-4.
158 La dimostrazione è preceduta dalla dimostrazione dei seguenti « principi più generali » : l'integrale di una somma è la somma degli integrali ; l'integrale del prodotto di un fattore costante per un fattore variabile è dato dal fattore costante per l'integrale del fattore variabile; l'integrazione di una funzione, talvolta, può essere facilitata sostituendo la variabile indipendente con altra variabile legata alla prima da una relazione data (Anonimo 1871-1872b), pp.4-7.
159 (Anonimo 1871-1872b), pp.7-8. Vi viene individuato il caso notevole che, per *n=-1*, si ha $\int x^n dx = \log x + C$, (Anonimo 1871-1872b), pp.9-10.
160 (Pareto 1869), p.5. In seguito, Pareto preciserà di ritenere gli assiomi matematici « semplicemente il riassunto di un numero sterminatamente grande di esperienze » fissatesi nel cervello dei nostri antenati, quale per esempio quella della tridimensionalità dello spazio, lettera del 9 dicembre 1891 a Maffeo Pantaleoni, (Pareto 1984a), pp.106-107, e di considerare anche la logica matematica, come ogni altro tipo di logica, una costruzione di origine sperimentale, lettera senza data, ma probabilmente dell'estate 1892, a Maffeo Pantaleoni, (Pareto 1984a), p.259, lettera ad Antonio Graziadei del 29 marzo 1901, (Pareto 1975a), pp.423-424.
161 (Pareto 1869), p.5.

matematica quale scienza pura (cioé come « espressione dell'umano pensiero »[162] originante da idee pretesamente innate), sosteneva che ogni conoscenza umana fosse conseguita solo con l'aiuto dei sensi[163] . Più precisamente, secondo lui ogni oggetto esiste non in sè ma solo se stabilisce un rapporto sensibile con l'uomo (« senza un rapporto con l'occhio umano al quale egli manda i suoi raggi, l'albero non esiste »[164]). Da ciò segue che tutto il sapere umano è un sapere obbiettivo costituito dalla conoscenza dei rapporti sensibili che gli oggetti stabiliscono con gli essere umani [165] e che tale sapere può progredire solo mediante « lo sviluppo dei sensi »[166]. Ed è forse ribadendo tale impostazione che Pareto affermerà in seguito di ritenere l'esperienza l'unico criterio di verità, che autorizza a giudicare « vero ciò che dà conclusioni conformi all'esperienza, falso ciò che conduce a conclusioni contrarie, dubbio ciò che non si può verificare sperimentalmente[167] ».
Ma come si perviene alle conclusioni veritiere, cioé come la scienza raggiunge il suo obbiettivo di riprodurre la realtà sperimentale[168], obbiettivo che per molto tempo (fino cioé all' « adesione » ad una sorta di relativismo para-einsteiniano che compirà a partire dal *Trattato di Sociologia Generale*)[169] Pareto ritiene almeno potenzialmente raggiungibile, sul fondamento della concezione[170] che « in natura non c'è nulla di indeterminato »[171]?
Moleschott riteneva che il metodo scientifico consistesse nel trovare « tutto quanto v'ha di generale fra molti fatti », quindi (operazione compiuta dal cervello) nel trasformare tale elemento generale in « un'idea » la quale, se confermata da « tutte le osservazioni successive », sarebbe stata considerata una legge[172]. Ed è forse ancora su tale sfondo epistemologico moleschottiano[173] che Pareto asserisce che le teorie costruite su principi non sperimentali non possono pervenire a risultati conformi alla realtà, neppure se si avvalgono degli svolgimenti analitici consentiti dalla matematica[174]. Infatti, d'accordo col J.S. Mill del *System of Logic*, Pareto considera la matematica semplicemente quale una macchina sillogistica che, con un'operazione quasi meccanica, non può che darci, come conclusione, le premesse seppure sotto un'altra forma[175].

[162] (Moleschott 1869), p.23.
[163] (Moleschott 1869), pp.23-24.
[164] (Moleschott 1869), pp.26-27.
[165] (Moleschott 1869), pp.26-27.
[166] (Moleschott 1869), pp.30-31.
[167] Lettera del 9 dicembre 1891 a Maffeo Pantaleoni, (Pareto 1984a), pp.106-107.
[168] (Pareto 1892c), p.405. Lo studio scientifico di tipo teorico è, secondo Pareto, anche alle origini « dell'umano incivilimento », (Pareto 1892b), p.139.
[169] Lettere a Arturo Linaker del 21 maggio 1921, (Pareto 1973), p.1065, a Maffeo Pantaleoni del 22 maggio 1921, (Pareto 1984c) ed a Giulio Farina del 16 ottobre 1921, (Pareto 2001), p.379.
[170] Forse anch'essa mutuata (almeno inizialmente) da Moleschott.
[171] (Pareto 1892b), p.129.
[172] (Moleschott 1869), pp.31-32.
[173] Che Pareto completerà aderendo (secondo modalità ancora da scoprire) alle impostazioni di J.S.Mill e di Claude Bernard promuoventi una metodologia scientifica circolare in tre passaggi : il primo consistente nell'individuare quanto vi di è comune a molti fenomeni, il secondo nel dedurre (non necessariamente con la matematica) le conseguenze logiche di tali entità comuni induttivamente determinate, il terzo nel confrontare tali deduzioni con i fenomeni effettivi per annotare concordanze e differenze che consentono di meglio specificare le entità comuni e così via indefinitamente (Pareto 1900), p.234.
[174] (Pareto 1869), p.5, (Pareto 1892e), p.206, lettera a Vito Volterra del 12 gennaio 1906, (Pareto 1989), p.451.
[175] Lettere del 3 e 7 ottobre 1891 a Maffeo Pantaleoni, (Pareto 1892d), p.14, (Pareto 1984a), pp.70-71, 74, (Pareto 1901), p.246.

Ricordato altresì che, per Pareto (in polemica, segnatamente, con l'apodittico integralismo matematico di Walras[176]), nell'attività scientifica qualunque metodo di ragionare è lecito purchè aumenti la quantità e/o migliori la qualità del sapere umano[177], può allora essere interessante chiedersi come ritenga che vi si possa impiegare al meglio tale macchina sillogistica.
Innanzitutto, progressivamente si convince che l'analisi matematica trova la sua maggiore efficacia euristica nella sua applicazione a problemi generali e qualitativi (cioé non numerici)[178]. Tuttavia, il suo impiego non rigoroso (in particolare il trarre deduzioni da premesse sperimentalmente infondate[179] o logicamente non dimostrate[180]) produce non solo risultati del tutto falsi ma anche la conseguenza, parimenti negativa, di presentare « sotto un falso aspetto teorie che pure sono giustissime [181] ».
Inoltre, e più in generale, l'uso, anche se rigoroso, dei metodi matematici non permette lo studio dei fenomeni naturali ma solo quello di loro rappresentazioni più o meno astratte [182]. Ciò implica, secondo Pareto, « la necessità di confrontare quanto più spesso ci è possibile le nostre deduzioni con l'esperienza o coll'osservazione, per essere certi che non abbiamo troppo deviato dai fatti di natura[183] ». E dei due metodi matematici, quello analitico e quello sintetico[184], *iuxta* Pareto solo il secondo permette di soddisfare la summenzionata, inaggirabile necessità[185].

---

[176] Lettera a Pantaleoni del 31 maggio 1893 (Pareto 1984a), p.382.
[177] Mediante la scoperta di nuove verità, il chiarimento ulteriore di altre già note e la rettifica di errori, (Pareto 1892c), p.390
[178] Lettera a Wilhelm Franz Meyer del 16 dicembre 1901, (Pareto 1975a), p.436. Lo strumentario sufficiente per tali indagini, all'inizio del secolo, gli sembra essere ancora quello, rappresentato da (Hoüel 1880), elaborato dalla matematica di metà Ottocento, lettera a Guido Sensini del 18 gennaio 1905, (Pareto 1975a), p.533.
[179] Lettera del 9 dicembre 1891 a Maffeo Pantaleoni, (Pareto 1984a), p.111, (Pareto 1892d), p.12
[180] Un esempio di mancato rigore analitico, su cui Pareto si sofferma a lungo, è l'uso di serie divergenti da parte di pur grandi matematici quali D'Alembert, i Bernoulli, Eulero, Lagrange, Abel, (Pareto 1892c), pp.393[3], 397. Della concezione paretiana del rigore matematico molto probabilmente non fanno, invece, parte le « sottigliezze varie » che la matematica pura gli sembra coltivare all'inizio del secolo, lettera a Guido Sensini del 18 gennaio 1905, (Pareto 1975a), p.533. Un requisito complementare al rigore, che Pareto sembra porre, è quello della necessaria, ma spesso trascurata, cura nell'esposizione delle teorie matematiche, lettera del 7 ottobre 1891 a Maffeo Pantaleoni, (Pareto 1984a), pp.73-74.
[181] Lettera senza data, ma probabilmente del gennaio 1870, a Angelo Genocchi, (Pareto 2001), p.1.
[182] (Pareto 1892c), pp.400-401. Polemizzando nuovamente con il summenzionato integralismo matematico walrasiano, Pareto mostra come il fenomeno (citato da Walras come esempio dell'uso euristicamente dirimente della matematica nello studio dei fenomeni naturali) della caduta dei gravi sulla superficie della terra sia stato studiato in modo sufficientemente soddisfacente solo nella forma, molto semplificata, dello studio di un punto materiale (e non di un corpo solido, come nel caso reale) che cade nel vuoto (e non nell'aria, come nel caso reale) supponendo la costanza (e non la variabilità, come nel caso reale) dell'intensità della gravità lungo la durata della caduta ed ignorando l'attrazione dei corpi celesti, *ibidem*.
[183] (Pareto 1892c), pp.399-400.
[184] Può darsi che Pareto tragga tale interessante distinzione da Gabriel Lamé, matematico seguace di Cauchy citato in (Pareto 1869). Per *scoperta analitica* (in generale ed algebrica, cioé mediante la « mise en équation des données et des inconnues de la question proposée », (Lamé 1818), p.8, in particolare) della soluzione di un problema (ed un problema non può che essere risolto analiticamente, (Lamé 1818), pp.9-10), (Lamé 1818), pp.8-9 intende la determinazione di grandezze incognite a partire dalle, preliminarmente date, relazioni intercorrenti tra le stesse. Per *presentazione sintetica* (in generale e geometrica, formulata cioé « sans autre secours que la consideration de[s] figures »,(Lamé 1818), p.8, in particolare) della soluzione (analiticamente già trovata) di un problema, (Lamé 1818), pp.8-9, intende, invece, la verifica di tale soluzione mediante la sua dimostrazione per assurdo (deduce dalla soluzione conseguenze contrarie a quanto si ritiene essere vero) oppure la determinazione delle relazioni intercorrenti tra le grandezze preliminarmente date.
[185] (Pareto 1892d), pp.12-14, (Pareto 1892c), pp.399-400.

Alla luce di tali scelte epistemologiche quale è allora il ruolo che la matematica può rivestire nell'economia politica secondo Pareto ?
Pur considerandola solo uno dei metodi in grado di far progredire l'economia politica[186], ritiene che quest'ultima finirà per avvalersene sempre di più, come è occorso a tutte le discipline che si occupano di variazioni di quantità[187] : ci pare tuttavia che Pareto attribuisca alla matematica, in economia politica, un ruolo epistemologico ancillare rispetto alla sperimentazione (in particolare sotto la forma dell'osservazione fenomenica)[188].
È sicuramente solo la pratica delle scienze fisico-matematiche a consentire allo spirito umano di comprendere che (come è il caso in economia politica) la dipendenza tra i fenomeni può non essere di tipo causale[189] : cioé che, dati i fenomeni A e B, si può trovare che A dipende da B e B dipende da A « sans qu'on puisse dire que l'un est la cause de l'autre »[190].
Di tale interdipendenza fenomenica « è impossibile [e] interamente inutil[e] » dare una rappresentazione dettagliata: ciò che serve è la sola conoscenza (a lungo trascurata[191]) dei suoi tratti principali[192]. Ed a tale fine l'osservazione della loro interdipendenza[193] ci indica il « fatto »[194] che i fenomeni economici sono non solo interdipendenti ma anche in equilibrio[195].
Ed in equilibrio essi sono descrivibili mediante la considerazione che le quantità note ed incognite su cui si articolano soddisfano certe condizioni[196]. Se il numero delle incognite è maggiore di due, come è evidentemente sempre il caso nel fenomeno economico, esse possono determinarsi solo con l'aiuto della matematica[197], che consente di formalizzare l'equilibrio[198] (conferendogli così anche una chiarezza concettuale non altrimenti ottenibile[199]) mediante un

---

[186] Lettera senza data, ma probabilmente dell'estate 1892, a Maffeo Pantaleoni, (Pareto 1984a), p.258, (Pareto 1896a), p.III.
[187] (Pareto 1892c), p.390, (Sensini 1906), p.424. Tuttavia precisa di non riconoscere ai matematici, in quanto tali, alcuna autorità nelle questioni di teoria economica, lettera a Hermann Laurent del 19 gennaio 1899, (Pareto 1989), p.348.
[188] Pareto ribadisce espressamente che il discriminante epistemologico fondamentale nello studio dei fenomeni economici risiede non nel ricorso o meno al metodo matematico ma nel ricorso o meno a quello sperimentale, lettera a Felice Vinci del 16 gennaio 1912, (Pareto 1975b), p.757.
[189] (Pareto 1896a), §§225, 559, (Pareto 1901), p.238, (Pareto 1907a) in (Pareto 1987), pp.149-150, (Pareto 1909), capitolo III, §3.
[190] È, per esempio, il caso dell'interdipendenza tra consumo e produzione, (Pareto 1907a) in (Pareto 1987), pp.149-150.
[191] (Pareto 1896a), §593, (Pareto 1909), capitolo III, §13
[192] (Pareto 1901), p.238.
[193] (Pareto 1907a), in (Pareto 1987), p.147 .
[194] (Pareto 1896a), §586, lettera a Maffeo Pantaleoni del 19 febbraio 1897, (Pareto 1984b), pp.35-36.
[195] Cioé tali che la variazione di un fenomeno fa variare, in modo finito o infinitesimo, gli altri fenomeni con la conseguenza che il fenomeno considerato viene ricondotto alla sua situazione originaria, (Pareto 1896a), §§40, 586, (Pareto 1902), (Pareto 1909), capitolo III, §22. In seguito, l'equilibrio diverrà solo « un'astrazione », lettera a Alfonso de Pietri-Tonelli del 18 marzo 1913, (Pareto 1975b), p.978, peraltro, (Pareto 1896a), §927[1], (Pareto 1901), pp.241-242, di grande interesse per introdurre lo studio rigoroso di un fenomeno, quale quello economico concreto, che è altresì di natura non statica ma dinamica,(Pareto 1896a), §§925-927.
[196] (Pareto 1901), p.240.
[197] (Pareto 1894), pp.149-151, (Pareto 1896a), §559[4], 588, (Pareto 1901), p.239, (Pareto 1901), p.241.
[198] Pareto (lettera a Maffeo Pantaleoni del 19 febbraio 1897, (Pareto 1984b), pp.35-36, (Sensini 1906), p.426), ritiene che l'unico merito scientifico di Walras sia stato quello di essere stato il primo a dare la rappresentazione formale (nell'ipotesi di libera concorrenza) dell'EEG. Peraltro, lettera a Guido Sensini dell' 8 agosto 1911, (Pareto 1975b), p.735, è stato solo per un dovere di correttezza verso il suo predecessore accademico che Pareto ha rinunciato a presentare l'EEG in un modo formalmente diverso da quello walrasiano.
[199] (Pareto 1907a) in in (Pareto 1987), p.154, (Pareto 1909), appendice, §115.

sistema di equazioni (di cui indica le condizioni di determinatezza[200]) che ci informa anche « sur le sens des variations de certains éléments quand on en fait varier d'autres »[201].
È, inoltre, interessante rilevare che, per Pareto, la summenzionata descrizione formale dei fenomeni economici non può prescindere dalla considerazione che essi, come in genere i fenomeni naturali, sono rappresentati da funzioni discontinue[202]. Pur essendo possibile, nell'elaborazione delle teorie economiche, tenere conto del fatto che le variabili economiche variano effettivamente in modi finiti[203], tuttavia, « pour la commodité des calculs »[204], è opportuno, seguendo la pratica delle altre scienze[205], sostituire tali funzioni discontinue con funzioni continue[206]. Tale sostituzione ha peraltro anche una giustificazione epistemologica, consistente nella circostanza che l'economia politica, occupandosi (come ogni altra scienza) « de grands nombres et de moyennes »[207], non può che studiare individui rappresentativi[208] la cui fenomenologia è descrivibile, appunto, mediante « quantités qui croissent par degrés insensibles et continus »[209].
L'uso della matematica in economia politica è quindi giustificato solo se concerne questioni generali e qualitative[210], come appunto la determinazione della soluzione non numerica dell'EEG[211] e delle condizioni del massimo di utilità per la società[212] : non è giustificato, invece,

---

[200] Mediante il « teorema per noi di grandissimo momento » il quale stabilisce che il sistema è determinato se è uguale il numero delle incognite ed il numero delle equazioni distinte e tra loro non contraddittorie (Pareto 1896a), §52, (Pareto 1901), p.240, (Pareto 1909), capitolo III, §38

[201] (Pareto 1896a), §581.

[202] (Pareto 1892f), p.172, (Pareto 1900), p.227.

[203] (Pareto 1896a), §24, (Pareto 1900), p.549. (Pareto 1909), capitolo III, §67, finirà col ritenere lo studio dell'economia politica condotto mediante il calcolo delle variazioni come euristicamente sterile, una pratica da pedanti che consentirebbe a costoro solo di « famigliarizzar[si] con l'arte dei calcoli aritmetici e con quella della soluzione delle equazioni algebriche e trascendenti ».

[204] (Pareto 1892f), p.172, (Pareto 1892a), p.504.

[205] Per esempio la meccanica newtoniana, (Pareto 1892a), p.504, (Pareto 1900), p.227, (Pareto 1909), capitolo III, §66.

[206] (Pareto 1892f), p.172.

[207] Lettera a Pantaleoni del 14 agosto 1892, (Pareto 1984a), p.275, (Pareto 1896a), §24, (Pareto 1900), p.228, (Sensini 1906), pp.429-430, (Pareto 1909), capitolo III, §§9-10.

[208] Se si afferma che l'equilibrio economico si ha quando un individuo consuma 1,10 orologi, si vuole dire che esso ha luogo quando « 100 individus consomment les uns une, les autres deux montres ou plus et même pas du tout, de façon que tous ensemble en consomment 110 environ, et que la moyenne est pour chacun 1,1 », (Pareto 1909), capitolo III, §66. In precedenza, aveva sostenuto l'inopportunità di specificare il tipo di media con cui esprimere l'individuo rappresentativo, (Pareto 1892b), p.145

[209] (Pareto 1896a), §24. Infatti, quando la domanda di un bene aumenta di un'unità : l'incremento è del 50%, e dunque finito, se la quantità precedentemente domandata era di un'unità ; è dello 0,001%, e dunque pressoché infinitesimale, se la quantità precedentemente domandata era di 100.000 unità, come è nella maggior parte dei fenomeni che l'economia politica è in grado di studiare (Pareto 1892g), p.285.

[210] Pareto attribuisce altresì all'economia matematica l'importante funzione critica di mettere in luce il principale errore dell'economia politica non matematica, consistente nell'avere voluto determinare una delle n incognite su cui si articola il fenomeno economico mediante una sola delle n equazioni che le mettono in relazione, lettera a Wilhelm Franz Meyer del 16 dicembre 1901, (Pareto 1975a), p.440, (Sensini 1906), p.429. Ciò non solo equivale a considerare simultaneamente incognita e data la variabile che si vuole determinare ma anche, e soprattutto, a rendere possibili tante determinazioni di tale variabile quante sono le equazioni in cui compare : determinazioni che, evidentemente, sarebbero non solo contraddittorie ma anche tutte errate, (Pareto 1901), pp.242-244.

[211] La sua soluzione numerica, che darebbe del fenomeno economico una conoscenza perfetta, non è ancora calcolabile, (Pareto 1896a), §580, (Pareto 1909), capitolo III, §218, lettera a Luigi Amoroso del 28 novembre 1911, (Pareto 1975b), p.745.

[212] (Sensini 1906), p.427, lettera a Maffeo Pantaleoni del 15 settembre 1907, (Pareto 1984c), p.61, lettera a Luigi Amoroso del 28 novembre 1911, (Pareto 1975b), p.745.

quando riguarda lo studio di, ancora insoddisfacentemente trattabili[213], questioni particolari e quantitative o di questioni qualitative ma particolari (in quanto trascuranti l'epistemologicamente fondamentale interdipendenza fenomenica), come quelle dell'equilibrio parziale[214].
L'EEG è, inoltre, solo una prima approssimazione del fenomeno economico concreto cui ci si avvicinerà ulteriormente mediante l'introduzione di nuove condizioni rappresentanti fenomeni secondari[215] rispetto a quello rappresentato in prima approssimazione[216]. Tuttavia il « programma di ricerca » dell'EEG secondo Pareto richiede ormai, piuttosto « che lo studio di più sottili e complete teorie economiche dell'equilibrio », lo studio empirico dei fenomeni economici che, come è occorso in tutte le altre scienze, favorirà in seguito un ulteriore sviluppo del loro studio teorico[217] .
Tale studio empirico mira a stabilire leggi empiriche ottenibili mediante l'interpolazione dei dati statistici[218]. Per Pareto, quest'ultimo problema si articola in quello (ancora insoddisfacentemente risolto) dell'ottenimento della rappresentazione numerica la meno errata possibile di un fenomeno[219] ed in quello della determinazione della forma della funzione che sintetizza tale rappresentazione[220].
Spessissimo si cerca solo se un fenomeno cresce o decresce in relazione ad un altro, cioé si cerca di interpolarlo con una retta, affermando che il fenomeno è crescente (decrescente) se l'inclinazione della retta è positiva (negativa)[221]. La perdurante imperfezione dei dati statistici, secondo Pareto, giustifica la scelta di determinare la funzione lineare interpolante mediante « un metodo spiccio, anche se grossolano » visto che metodi più raffinati, ma di applicazione molto più laboriosa, darebbero di tale funzione una forma solo illusoriamente più precisa[222]. E per il minor numero di calcoli che richiede, Pareto ritiene preferibile, in particolare rispetto al metodo dei minimi quadrati ed a quello della minore somma del valore assoluto degli scarti, il metodo di interpolazione di Cauchy [223].

5. Primi elementi circa l'influenza della matematica di Genocchi sulla concezione paretiana della matematica.

La ricerca finora condotta ci ha persuaso che solamente quando avremo terminato la ricostruzione della formazione scientifica giovanile di Pareto potremo stabilire con sufficiente precisione l'effettiva influenza che l'insegnamento genocchiano ha esercitato sull'opera di Pareto, il quale,

---

[213] Per la mancanza di dati statistici attendibili, (Sensini 1906), p.427.
[214] Donde, in particolare, il giudizio negativo sull'economia matematica di Marshall, lettere a Maffeo Pantaleoni del 15 e del 28 settembre 1907, (Pareto 1984c), pp.61, 64, lettera a Luigi Amoroso del 21 aprile 1908, (Pareto 1975a), p.630.
[215] Tale è la funzione dell'economia applicata, (Pareto 1909), capitolo III, §228.
[216] (Pareto 1896a), §596. Questa modalità di studio dei fenomeni reali, che va dal semplice al complesso, è dovuta all'incapacità dello spirito umano di considerare simultaneamente una quantità di fenomeni, (Pareto 1896a), §557[2].
[217] Lettera a Alfonso de Pietri-Tonelli del 18 marzo 1913, (Pareto 1975b), p.978.
[218] (Pareto 1907b), in (Pareto 1987), p.366.
[219] (Pareto 1907b), in (Pareto 1987), p.366.
[220] (Pareto 1907b), in (Pareto 1987), p.367.
[221] (Pareto 1896b), pp.80-84.
[222] (Pareto 1907b), in (Pareto 1987), pp.367-368.
[223] Si tratta di una posizione già formulata in (Pareto 1892b), p.,135 e poi confermata in (Pareto 1896b), pp.80-84, (Pareto 1907b), in (Pareto 1987), p.384, lettera a Luigi Amoroso del 3 gennaio 1908, (Pareto 1975a), p.618, lettera a Henry Ludwell Moore del 17 dicembre 1908, (Pareto 1989), p.474, lettera a Felice Vinci del 26 gennaio 1918, (Pareto 1975b), p.995 .

peraltro, attribuisce al proprio professore di analisi matematica « tutto quello » che sa di matematica[224] e la passione per questa disciplina[225] .
L'analisi matematica insegnata da Genocchi a Pareto è alla frontiera manualistica internazionale della disciplina, quella che mette capo al *Cours d'Analyse* di Cauchy, e si articola[226] : sulla differenziazione delle funzioni (esplicite ed implicite) di una o più variabili (reali o immaginarie) e sulle relative applicazioni analitiche (segnatamente la teoria dei massimi e dei minimi) e geometriche ; sull'integrazione dello stesso tipo di funzioni, sulle regole di integrazione delle equazioni differenziali e sulle loro applicazioni geometriche
Genocchi, inoltre, sembra avere fatto un tentativo di presentare ai suoi studenti la disciplina seguendo le sue due principali scelte epistemologiche, quella a favore della «parte astratta e speculativa della matematica » e quella del rigore metodologico. Quest'ultimo ci pare riguardare non solo la coerenza logica dei ragionamenti (che Genocchi cerca di assicurare alla sua esposizione la quale, per quanto la conosciamo, è caratterizzata dallo sviluppo meticolosamente completo di tutti i passaggi delle dimostrazioni) ma anche, e forse soprattutto, la plausibilità degli assiomi, una plausibilità raggiungibile mediante una loro dimostrazione sperimentale (nel senso anche laboratoristico del termine) oppure una verifica accurata della loro evidenza universale oppure una loro dimostrazione logica inoppugnabile.
Tale analisi matematica è quella che, secondo Pareto, serve per l'indagine scientifica ed è quella che ci sembra usare, nella parte dei principi e delle applicazioni analitiche piuttosto che in quella delle applicazioni geometriche, in tutta la sua ricerca economica.
Il ruolo scientifico della matematica è peraltro ancillare a quello dell'osservazione fenomenica, scelta epistemologica fondamentale che Pareto non mutua da Genocchi (che non ci sembra essersi occupato della questione) ma probabilmente da Moleschott (maturandola decisivamente in seguito con la lettura di J.S.Mill e Bernard). L'analisi matematica è un utile strumento quasi meccanico per sviluppare[227] premesse con inimitabile chiarezza, giungendo a conclusioni la cui conformità alla realtà (unico criterio di valutazione ritenuto da Pareto) dipende però solo dalla conformità alla realtà delle premesse stesse. Pertanto, l'analisi matematica (e l'algebra complementare) non avrebbero diritto di cittadinanza in economia se non fosse per sviluppare con efficacia euristica l'idea, suggerita dall'osservazione, di un'interdipendenza fenomenica di equilibrio[228]. Ed in questa necessità, per la fecondità euristica dell'analisi scientifica, della plausibilità del suo punto di partenza si potrebbe vedere un'altra interessante assonanza (epistemologica) tra Genocchi ed il suo allievo.

---

[224] Lettera senza data, ma probabilmente del gennaio 1870, a Angelo Genocchi, (Pareto 2001), p.1
[225] (Pareto 1869), p.49. Genocchi è il suo unico professore universitario che Pareto citi nei suoi scritti.
[226] Sviluppando un'algebra complementare ed una geometria analitica di cui conosciamo solo che concernevano la teoria delle equazioni, i principi del calcolo delle differenze, le serie, la geometria analitica (cartesiana, polare e di Plücker) del piano e dello spazio e le sue applicazioni alla soluzione geometrica delle equazioni.

[227] Quando è usato con la necessaria cura.
[228] Analogamente la troppo modesta qualità dei dati forniti dalla statistica economica non può esser compensata, ai fini della pur necessaria (per lo sviluppo del programma di ricerca dell'EEG) ricerca di nuove leggi empirica, dalla raffinatezza degli strumenti matematici disponibili.

Bibliografia

Abrate, M. (1973). "Pareto e la Scuola Torinese." L'Informazione industriale: 4-8.
Anonimo (1871-1872a). Genocchi, Calcolo Differenziale 1871-1872.
Anonimo (1871-1872b). Genocchi, Calcolo Integrale 1871-1872.
Beltrami, E. (1868a). "Saggio di interpretazione della geometria non euclidea." Giornale di Matematica **6**: 284-312.
Beltrami, E. (1868b). "Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante." Annali di matematica pura ed applicata **II**: 232-255.
Borzieri, G. (1999). Le lezioni di analisi di Angelo Genocchi (1871-72) e il Trattato Genocchi-Peano (1884) a confronto: un'analisi storico critica. Torino, Università degli Studi di Torino,Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali (tesi di laurea).
Bottazzini, U. (1981). Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass. Torino, Boringhieri.
Bottazzini, U. (1990). Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea. Torino, Utet.
Bottazzini, U. (1991). Angelo Genocchi e i principi del calcolo, in Conte, A. Giacardi, L. (eds), Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'espistolario. Torino, Deputazione subalpina di storia patria**:** 31-60.
Bottazzini, U. (1994). Và pensiero. Immagini della matematica nell'Italia dell'Ottocento. Bologna, Il Mulino.
Boyer, C. B. (1976). Storia della matematica. Milano, ISEDI.
Bridel, P. Tatti, E., Eds, (1999), L'équilibre général. entre économie et sociologie/ numéro spéciale de la Revue européenne des sciences sociales.
Bruni, L. (2002). Vilfredo Pareto and the birth of modern microeconomics. Cheltenham UK-Northampton MA, USA, Edward Elgar.
Bruno, G. (1868). "Alcune proposizioni sulla superficie conoide avente per direttrici due rete." Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino **XXIV**: 317-325.
Busino, G. (1968). Introduction à une Histoire de la Sociologie de Pareto. Genève, Droz.
Carbone, L., Gatto, R. , Palladino F., Eds. (2001). L'epistolario Cremona-Genocchi (1860-1886). La costituzione di una nuova figura di matematico nell'Italia unificata. Firenze, Olschki.
Cauchy, A. (1821). Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. Paris.
Conte, A. (1991). Angelo Genocchi Patriota e Matematico, in Conte, A. Giacardi, L. (eds), Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'espistolario. Torino, Deputazione subalpina di storia patria**:** 1-9.
Conte, A., Giacardi, L., Eds. (1991). Angelo Genocchi e i suoi interlocutori. Contributi dall'epistolario. Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria.
Daviet de Foncenex, F. (1760-1761). "Sur les principes fondamentaux de la Mécanique." Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin **II**: 299-322.
Euclide (1970). Gli Elementi. Torino, UTET.
Fenoglio, L. (1991). L'epistolario di Angelo Genocchi- Schedatura. in Conte, A. Giacardi, L. (eds), Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'espistolario. Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria**:** 303-393.
Fenoglio L. and L. Giacardi (1991). La polemica Genocchi-Beltrami sulle superficie pseudosferiche: una tappa nella storia del concetto di superficie, in Conte, A. Giacardi, L. (eds), Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'espistolario. Torino, Deputazione subalpina di storia patria**:** 155-209.

Fiocca, A. (1991). Problematiche emergenti dalla corrispondenza A.Genocchi-S.Gherardi (1862-1878), in Conte, A. Giacardi, L. (eds), Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'espistolario. Torino, Deputazione subalpina di storia patria**:** 99-112.

Flye Sainte Marie, C. (1871). Etudes analytique sur la theorie des paralleles. Paris, Gauthier Villars.

Galletto, D. (1991). Il contributo di Angelo Genocchi all'Accademia delle Scienze di Torino con particolare riferimento alle geometrie non euclidee, in Conte, A. Giacardi, L. (eds), Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'espistolario. Torino, Deputazione subalpina di storia patria**:** 113-153.

Genocchi, A. (1851). "Solution générale de la question pour trouver des nombres rationnels satisfaisant aux deux équations $x^2+y^2-1=z^2$, $x^2-y^2-1=u^2$." Nouvelles Annales de Mathématiques **X**: 80-85.

Genocchi, A. (1852a). "Intorno all'espressione generale de' numeri bernulliani." Annali di scienze matematiche e fisiche compilati da Barnaba Tortolini **3**: 395-405.

Genocchi, A. (1852b). "Sulla formula sommatoria di Eulero e sulla teorica de' residui quadratici." Annali di scienze matematiche e fisiche **3**: 406-436.

Genocchi, A. (1854). "Note sur la théorie des résidus quadratiques." Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers, Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique **25**: 1-54.

Genocchi, A. (1855). "Storia dell'Algebra dei Congrui." Il Cimento **VI**(VIII): 670-679.

Genocchi, A. (1857a). "Leonardo Pisano matematico del secolo XIII." Annali di scienze matematiche e fisiche compilati da Barnaba Tortolini **VIII**(luglio).

Genocchi, A. (1857b). "Memoria sopra una formola di Lagrange spettante al moto dei fluidi nei vasi." Annali di scienze matematiche e fisiche **VIII**: 396-422.

Genocchi, A. (1860). "Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite." Annali di matematica pura ed applicata **3**: 52-59.

Genocchi, A. (1864). "Intorno all'equazione $x^7+y^7+z^7=0$." Annali di matematica pura ed applicata **6**: 287-288.

Genocchi, A. (1865). "Intorno ad alcune somme di cubi." Annali di matematica pura ed applicata **7**: 151-158.

Genocchi, A. (1865-1866). Calcolo differenziale. Fondo Genocchi presso il Fondo Antico della Biblioteca Civica di Piacenza.

Genocchi, A. (1866). "Intorno alla formazione ed integrazione d' alcune equazioni differenziali nella teorica delle funzioni ellittiche." Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino **23**: 223-362.

Genocchi, A. (1869a). "Di una formula del Leibniz e di una lettera di Lagrange al Conte Fagnano." Atti della R. Accademia delle scienze di Torino **IV**: 263-278.

Genocchi, A. (1869b). "Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex." Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino **4**: 323-327.

Genocchi, A. (1871). "Notizie intorno alla vita ed agli scritti di Felice Chiò." Bullettino di bibliografia e di storia della scienze matematiche e fisiche **IV**(settembre): 363-380.

Genocchi, A. (1872). "Intorno ad una lettera del Sig.Conte L.F.Menabrea. Appunti di Angelo Genocchi." Bullettino di bibliografia e di storia della scienze matematiche e fisiche **V**: 535-542.

Genocchi, A. (1872-1873). "Su d'una controversia intorno alla serie di Lagrange." Atti della R. Accademia delle scienze di Torino **VIII**: 18-31.

Genocchi, A. (1873a). "Lettre à M. Adolphe Quetelet, sécretaire perpétuel de l'Académie, sur diverses questions mathématiques." Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Belgique **36**: 181-196.
Genocchi, A. (1873b). "Observations relatives à une Note précédente de M.Menabrea, concernant la série de Lagrange." Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris **LXXVII**: 1541-1544.
Genocchi, A. (1873-1874). "Intorno ad alcune lettere del Lagrange." Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino **9**: 746-762.
Genocchi, A. (1875-76). "Intorno a tre problemi matematici di Pietro Fermat." Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino **11**: 811-829.
Genocchi, A. (1876a). "Dei primi principi della Meccanica e della Geometria in relazione al postulato di Euclide." Memorie della Società italiana delle Scienze **2**: 153-189.
Genocchi, A. (1876b). "Sunto di una Memoria intorno ai principi della geometria." Atti della R. Accademia delle scienze di Torino **XII**: 489-494.
Genocchi, A. (1878a). "Appendice à Sur un mémorie de Daviet de Foncenex et sur les géometries non-euclidiennes: Sur l'existence de la pseudosphère et sur l'impossibilité de démontrer le postulatum d'Euclide." Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino **29**: 390-404.
Genocchi, A. (1878b). "Sur un mémorie de Daviet de Foncenex et sur les géometries non-euclidiennes." Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino **29**: 365-404.
Genocchi, A. (1883a). "Démonstration d'un théorème de Fermat." Nouvelles Annales de Mathématiques **2**: 306-310.
Genocchi, A. (1883b). "Intorno alla filosofia della matematica. Lettera al signor Conte P(ietro) S(elvatico)." Rivista di Matematica Elementare **V**: 193-202.
Genocchi, A. (1883c). Note biografiche intorno ai tre fondatori della R.Accademia delle Scienze. I. Luigi Lagrange. Il primo secolo della R.Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783-1883). Torino, Stamperia Reale di G.B. Paravia e C.**:** 86-95.
Genocchi, A. (1884a). Calcolo differenziale e principi di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte dal Dr.Peano. Torino, Bocca.
Genocchi, A. (1884b). "Intorno alla funzione gamma e alla serie dello Stirling che ne esprime il logaritmo." Memorie della Società italiana delle Scienze **VI**: 1-24.
Genocchi, A. (1885). "Extrait d'une lettre de M.Genocchi." Nouvelles Annales de Mathématiques.
Giacardi, L. (1999). Genocchi, Angelo. Dizionario biografico degli italiani. Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana. **LIII:** 129-132.
Houël, J. (1880). Cours de calcul infinitesimal. Paris, Gauthier-Villars.
Lamé, G. (1818). Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Paris, Courcier.
Marchionatti, R. (1999). The methodological foundations of pure and applied economics in Pareto. An anti-walrasian programme, in Bridel, P. Tatti, E. (eds), L'équilibre général. entre économie et sociologie/ numéro spéciale de la Revue européenne des sciences sociales. **:** 277-294.
Marchionatti, R. and E. Gambino (1997). "Pareto and political economy as a science. methodological revolution and analytical advances in economic theory in the 1890s." Journal of Political Economy **105**(6): 1322-1348.
Marchionatti, R. and F. Mornati (2003). Pareto et l'économie mathématique au début des années '90. Quelques réflexions à propos des "Considerazioni sui principi fondamentali

dell'economia politica pura" in Cherkaoui, M. (ed.), Histoire et Théorie des Sciences Sociales. Mélanges en l'honneur de Giovanni Busino. . Genève, Droz.
Matteucci, C. (1872). Relazione introduttiva del Ministro Matteucci al Regolamento generale delle Università del Regno d'Italia. Torino.
Menabrea, L. F. (1872). "Intorno ad uno scritto del Sig.Prof.Angelo Genocchi, lettera del Conte Luigi Federigo Menabrea a D.B. Boncompagni." Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche **V**(agosto): 301-305.
Moleschott, J. (1869). La circolazione della vita. Lettere fisiologiche di Jacob Moleschott in risposta alle lettere chimiche di Liebig. Milano, Gaetano Brigola Editore.
Mornati, F. (1999). Le début des différends entre Pareto et Walras vu à travers leur correspondance et leurs ouvrages.1891-1893, in Bridel, P. Tatti, E. (eds), L'équilibre général. entre économie et sociologie/ numéro spéciale de la Revue européenne des sciences sociales. **:** 261-275.
Pareto, V. (1869). Principj fondamentali della teoria della elasticità de' corpi solidi e ricerche sulla integrazione delle equazioni differenziali che ne definiscono l'equilibrio. Firenze, Pellas.
Pareto, V. (1892a). "Considerazioni sui principi fondamentali dell'economia politica pura II." Giornale degli Economisti: 485-512.
Pareto, V. (1892b). "Considerazioni sui principi fondamentali dell'economia politica pura III." Giornale degli Economisti: 119-157.
Pareto, V. (1892c). "Considerazioni sui principi fondamentali dell'economia politica pura. I." Giornale degli Economisti: 390-420.
Pareto, V. (1892d). "Di un errore del Cournot nel trattare l'economia politica colla matematica." Giornale degli Economisti **I**: 1-14.
Pareto, V. (1892e). "La teoria dei prezzi dei signori Auspitz e Lieben e le osservazioni del professore Walras." Giornale degli Economisti: 201-239.
Pareto, V. (1892f). "Les nouvelles théories économiques. Lettres au directeur du "Monde économique", IV." Le monde économique: 171-172.
Pareto, V. (1892g). "Les nouvelles théories économiques. Lettres au directeur du "Monde économique", VIII." Le monde économique: 285-286.
Pareto, V. (1894). "Teoria matematica dei cambi forestieri." Giornale degli Economisti: 142-173.
Pareto, V. (1896a). Cours d'Economie politique professé à l'Université de Lausanne. Lausanne, François Rouge.
Pareto, V. (1896b). "Il modo di figurare i fenomeni economici. A proposito di un libro del dott.Fornasari." Giornale degli Economisti: 75-87.
Pareto, V. (1900). "Sunto di alcuni capitoli di un nuovo trattato di economia pura." Giornale degli Economisti: 216-235 511-549.
Pareto, V. (1901). "Le nuove teorie economiche (con, in appendice, le equazioni dell'equilibrio dinamico)." Giornale degli Economisti: 235-259.
Pareto, V. (1902). L'economie pure, résumé du cours donné à l'Ecole des Hautes Etudes Sociales de Paris en novembre 1901. chez l'auteur.
Pareto, V. (1907a). "L'économie et la sociologie au point de vue scientifique." Scientia(I): 293-312.
Pareto, V. (1907b). "L'interpolazione per la ricerca delle leggi economiche." Giornale degli Economisti: 366-385 423-453.
Pareto, V. (1909). Manuel d'économie politique. Paris, Giard et Brière.

Pareto, V. (1973). Epistolario 1890-1923, secondo tomo. Roma, Accademia Nazionale dei Lincei.
Pareto, V. (1975a). Correspondance 1890-1923 (tome I 1890-1909). Genève, Droz.
Pareto, V. (1975b). Correspondance 1980-1923 (tome II 1909-1923). Genève, Droz.
Pareto, V. (1981). Lettres 1860-1890. Genève, Droz.
Pareto, V. (1984a). Lettere a Maffeo Pantaleoni 1890-1923 - Volume primo 1890-1896. Genève, Droz.
Pareto, V. (1984b). Lettere a Maffeo Pantaleoni 1890-1923 - Volume secondo 1897-1907. Genève, Droz.
Pareto, V. (1984c). Lettere a Maffeo Pantaleoni 1890-1923 - Volume terzo 1907-1923. Genève, Droz.
Pareto, V. (1987). Marxisme et économie pure. Genève, Droz.
Pareto, V. (1989). Lettres et correspondances. Genève, Droz.
Pareto, V. (2001). Nouvelles Lettres (1870-1923). Droz, Genève.
Peano, G. (1890). Angelo Genocchi. Regia Università degli Studi di Torino, Annuario Accademico per l'anno1889-1890. Torino, Stamperia Reale di Torino**:** 195-202.
Pepe, L. (1991). Angelo Genocchi e l'edizione della corrispondenza di Lagrange, in Conte, A. Giacardi, L. (eds), Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'espistolario. Torino, Deputazione subalpina di storia patria**:** 221-240.
Pepe, L. (1999). La formazione matematica di Vilfredo Pareto in Bridel, P. Tatti, E. (eds), L'équilibre général. entre économie et sociologie/ numéro spéciale de la Revue européenne des sciences sociales. **:** 173-189.
Picutti, E. (1991). I contributi di Angelo Genocchi alla storia della matematica medioevale, in Conte, A. Giacardi, L. (eds), Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'espistolario. Torino, Deputazione subalpina di storia patria**:** 241-280.
Roero, C. S., a cura di (1999). La facoltà di scienze matematiche fisiche naturali di Torino 1848-1998. Torino, Deputazione subalpina di storia patria.
Sensini, G. (1906). "Applicazioni della matematica all'economia politica del Prof.Vilfredo Pareto." Giornale degli Economisti: 424-453.
Siacci, F. (1889). "Cenni necrologici di Angelo Genocchi letti il giorno trigesimo dalla sua morte." Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino **39**: 463-495.
Tarascio, V. J. (1968). Pareto's Methodological Approach to Economics. A Study in the History of Some Scientific Aspects of Economic Thought. Chapell Hill (North Carolina), The University of North Carolina Press.
Tommissen, P. (1971). De economische epistemologie van Vilfredo Pareto. Bruxelles, Sint-Aloysiushandelshogeschool.
Viola, C. (1991). Alcuni aspetti dell'opera di Angelo Genocchi riguardanti la teoria dei numeri, in Conte, A. Giacardi, L. (eds), Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'espistolario. Torino, Deputazione subalpina di storia patria**:** 11-29.